Corrigé - B.E.P.C 2020 - Mathématiques

A) Activité numériques et diverses

Exercice 1

a. Vrai.

b. Faux.

En effet, en prenant $x = 1$ et $y = 4$, on a $|x - y| = |1 - 4| = |-3| = 3$
Mais $|x| - |y| = |1| - |4| = 1 - 4 = -3$.
Ce qui prouve que l'inégalité : $|x - y| \leq |x| - |y|$ est fausse pour $x = 1$ et $y = 4$.

c. Vrai.

d. Faux.

En effet, en prenant $x = -1$ et $y = 4$, on a $|x + y| = |-1 + 4| = |3| = 3$
Mais $|x| + |y| = |-1| + |4| = 1 + 4 = 5$.
Ce qui prouve que l'inégalité : $|x + y| \geq |x| + |y|$ est fausse pour $x = -1$ et $y = 4$.

Exercice 2

a. Factorisons d'abord l'expression : $x^2 - 25$
Cette expression est de la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
D'où $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$.

Factorisons maintenant $E = (3x - 2)(x + 5) - (x^2 - 25)$

$$\begin{aligned}
E &= (3x-2)(x+5) - (x^2 - 25) \\
&= (3x-2)(x+5) - (x^2 - 5^2) \\
&= \underbrace{(x+5)}_{k}\underbrace{(3x-2)}_{a} - \underbrace{(x+5)}_{k}\underbrace{(x-5)}_{b} \qquad \text{c'est de la forme } k \times a - k \times b = k \times (a - b) \\
&= (x+5) \times [(3x-2) - (x-5)] \\
&= (x+5) \times (3x - 2 - x + 5) \\
&= (x+5)(2x+3)
\end{aligned}$$

L'expression factorisée de $E = (3x - 2)(x + 5) - (x^2 - 25)$ est $E = (x + 5)(2x + 3)$.

b. On sait qu'un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un des facteurs est nul c'est à dire :
$a \times b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(x+5)(2x+3)=0 &\iff x+5=0 \quad \text{ou} \quad 2x+3=0\\ &\iff x=-5 \quad \text{ou} \quad 2x=-3\\ &\iff x=-5 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{3}{2}\end{aligned}.$$

L'équation $(x+5)(2x+3)=0$ admet pour solutions, l'ensemble $S=\left\{-5;-\frac{3}{2}\right\}$.

Exercice 3

a. f étant de la forme $f(x)=ax+b$ avec $a=2$ et $b=-4$ est donc une fonction affine. Comme $a=2>0$, alors f est une fonction croissante.

b. f étant une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.

Tableau de valeurs de f

Pour $x=0$, $f(0)=-4$

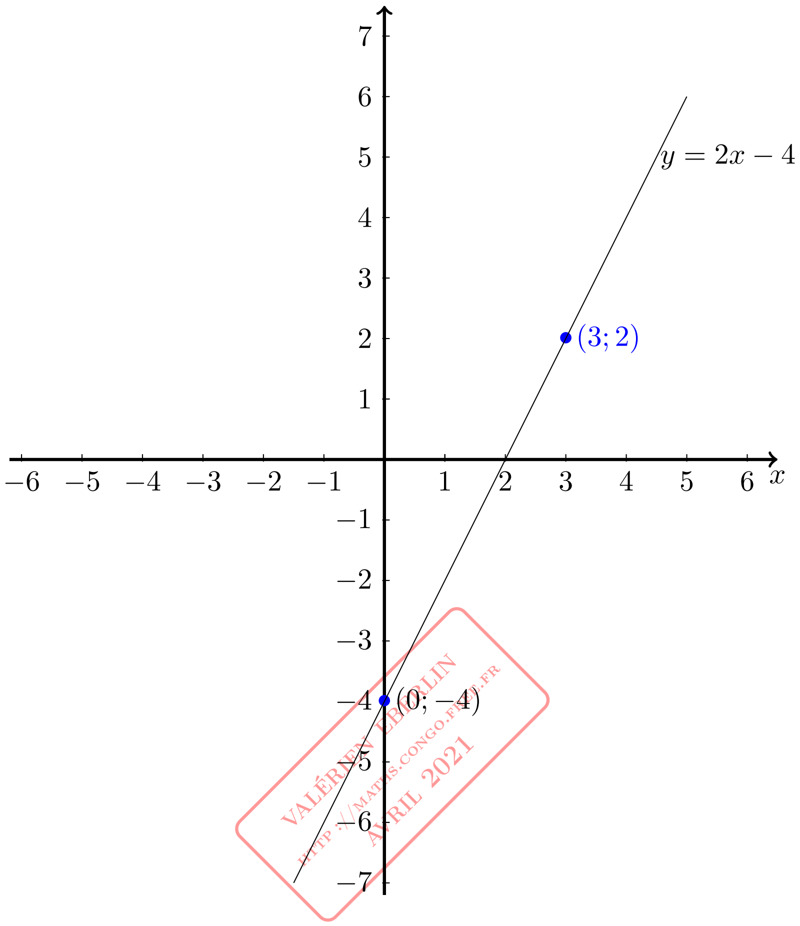
Pour $x=3$, $f(3)=2\times 3-4=2$.

D'où le tableau de valeurs :

x	0	3
$f(x)$	-4	2

La droite représentative de f est la droite qui passe par les points $(0,-4)$ et $(3;2)$.

Représentation graphique de f



Problème A

1 L'effectif total est : $6 + 2 + 5 + 7 = 20$.

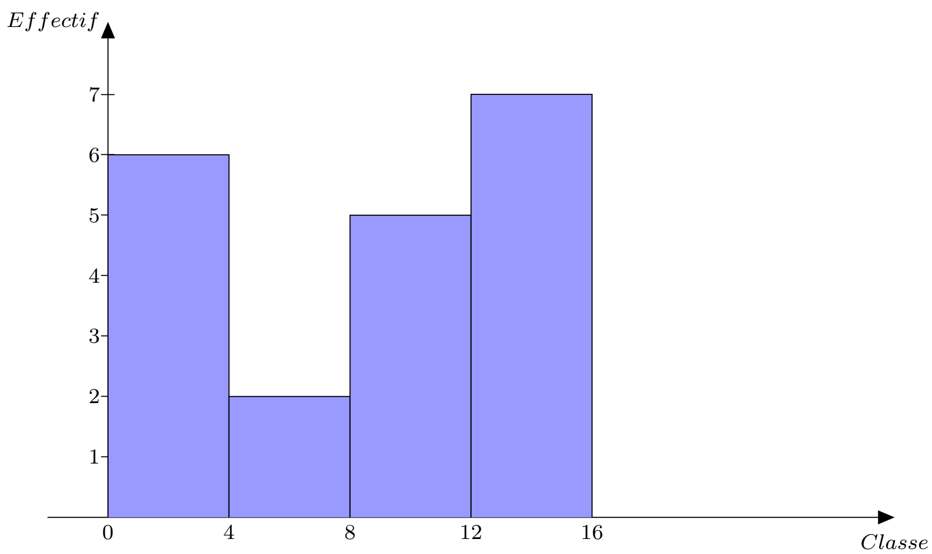
2

Note (en classe)	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 16[$
Centre de classe	2	6	10	14
Effectif	6	2	5	7

3 - L'amplitude de la classe $[0; 4[$ est $4 - 0 = 4$;
- L'amplitude de la classe $[4; 8[$ est $8 - 4 = 4$;
- L'amplitude de la classe $[8; 12[$ est $12 - 8 = 4$;
- L'amplitude de la classe $[12; 16[$ est $16 - 12 = 4$.

On en déduit que l'amplitude de la série statistique est 4.

4



B) Activités géométriques

Exercice 1

La médiane d'un triangle c'est toute droite qui passe par son sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

La hauteur d'un triangle c'est toute droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au support du côté opposé à ce sommet.

Exercice 2

La droite $(\mathscr{D})$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est donnée par l'équation :

$(\mathscr{D})$: $\dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b}$ où $(a; b)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

$(\mathscr{D})$: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-(-1)}{-1}$

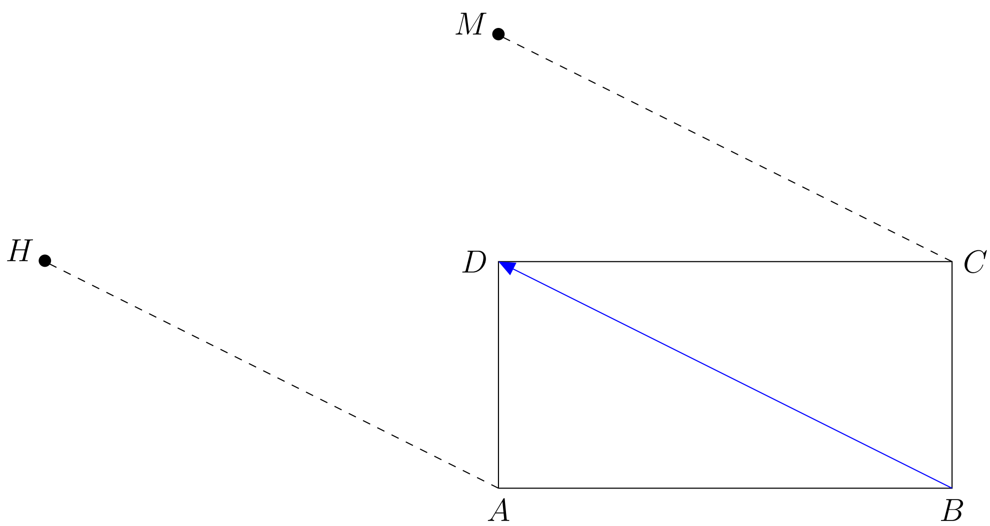
$(\mathscr{D})$: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1}$

En appliquant l'égalité des produits en croix à l'égalité précédente, on obtient $-x+2 = 3(y+1)$ ou encore $-x+2 = 3y+3$.

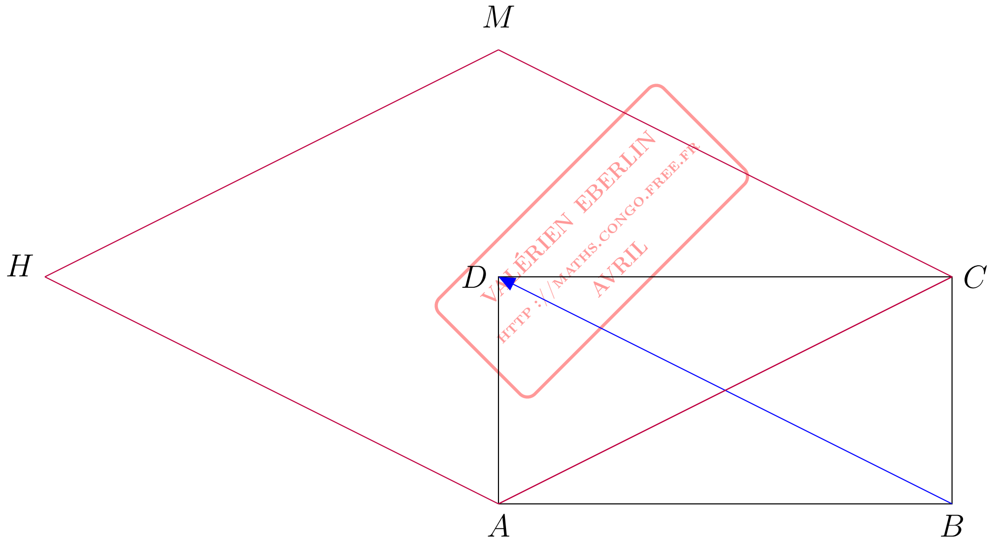
D'où l'équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$: $x + 3y + 1 = 0$.

Exercice 3

1



2



Le quadrilatère $ACMH$ est un losange.

(1) $AH = AC$

En effet, comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BD}$ alors $AH = BD$. Or $BD = AC$ (car les diagonales d'un rectangle sont de même longueur). Donc $AH = AC$

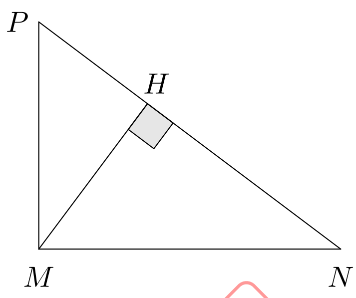
(2) De plus, $ACMH$ est un parallélogramme

En effet, comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$, alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CM}$. De cette dernière égalité, on en déduit que le quadrilatère $AHMC$ (qui est le même que le quadrilatère $ACMH$) est un parallélogramme.

D'après (1) et (2), $ACMH$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un losange.

Problème B

1



2

$NP^2 = 5^2$ $= 25$	$MN^2 + MP^2 = 4^2 + 3^2$ $= 16 + 9$ $= 25$

J'en déduis que $NP^2 = MN^2 + MP^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en M.

3 Calcul de NH

- Dans le triangle MNP rectangle en M, $\cos(\widehat{MNP}) = \dfrac{MN}{NP} = \dfrac{4}{5}$.

- Dans le triangle MNH rectangle en H, $\cos(\widehat{MNH}) = \dfrac{NH}{MN} = \dfrac{NH}{4}$.

Or $\widehat{MNP} = \widehat{MNH}$. On en déduit que $\dfrac{4}{5} = \dfrac{NH}{4}$.

D'où $NH = \dfrac{4 \times 4}{5} = 3,2$ cm.

Calcul de MH

Dans le triangle MNH rectangle en H, j'applique le théorème de Pythagore.
$MN^2 = MH^2 + NH^2$
$4^2 = MH^2 + 3,2^2$
On en déduit que $MH^2 = 4^2 - 3,2^2 = 5,76$
D'où $MH = \sqrt{5,76} = 2,4$ cm.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR AVRIL 2021