

Corrigé - B.E.P.C 2016 - Mathématiques

A) Activités numériques et diverses (10 points)

Exercice 1

- Résolvons la première inéquation (1) : $2x - 1 < x + 4$ (1).

$$(1) : 2x - 1 < x + 4$$

$$2x - x < 4 + 1 \quad (\text{Lorsqu'un terme change de membre, il change de signe})$$

$$x < 5$$

La solution de l'inéquation (1) : $2x - 1 < x + 4$ est $S_1 =] - \infty ; 5[$ ou encore graphiquement :



- Résolvons la seconde inéquation (2) : $5x + 3 \geq x - 1$.

$$(2) : 5x + 3 \geq x - 1$$

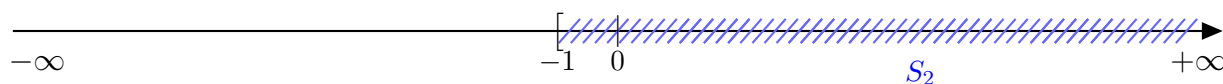
$$5x - x \geq -1 - 3 \quad (\text{Lorsqu'un terme change de membre, il change de signe})$$

$$4x \geq -4$$

$$\frac{4x}{4} \geq \frac{-4}{4} \quad (\text{L'inégalité ne change pas de sens lorsque l'on divise les deux membres de l'inéquation par un même nombre positif})$$

$$x \geq -1$$

La solution de l'inéquation (2) : $5x + 3 \geq x - 1$ est $S_2 = [-1 ; +\infty[$ ou encore graphiquement :



On en déduit que la solution du système d'inéquations : $\begin{cases} 2x - 1 < x + 4 & (1) \\ 5x + 3 \geq x - 1 & (2) \end{cases}$ est l'ensemble $S_1 \cap S_2$, intersection des deux solutions S_1 et S_2 . D'où la représentation graphique de $S_1 \cap S_2$:



$$S_1 \cap S_2 = [-1 ; 5[$$

Exercice 2

a. L'effectif total est : $15 + 42 + 84 + 35 + 10 = 186$ candidats.

b.

Note	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 16[$	$[16; 20]$
Effectif	15	42	84	35	10
Effectifs cumulés décroissants	186	171	129	45	10

Exercice 3

a. La fonction affine $g(x) = 3x - 1$ a pour coefficient directeur $a = 3$.

Comme le coefficient directeur de la fonction g est positif ($a = 3 > 0$), alors g est une fonction croissante.

b. f étant une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.

Tableau de valeurs de f

Pour $x = 0$, $f(0) = 5$

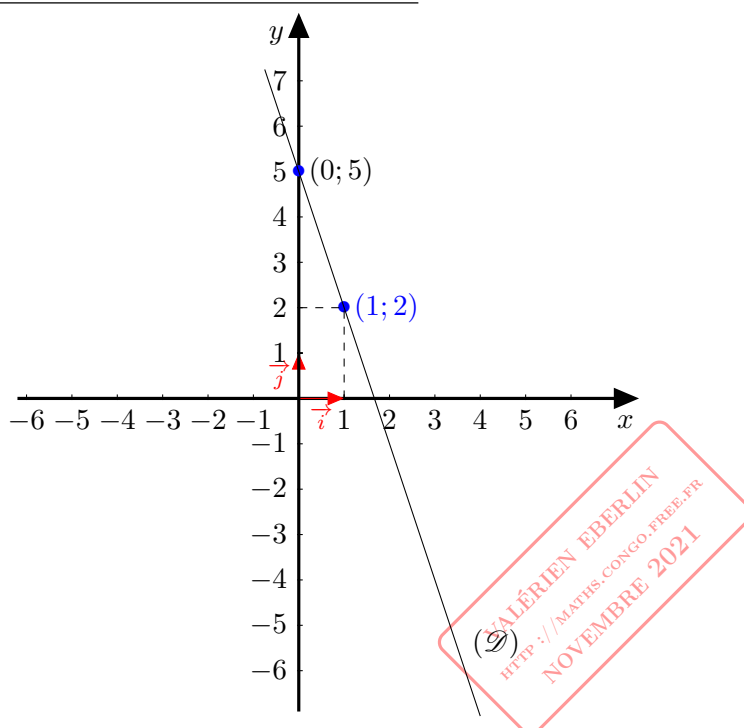
Pour $x = 1$, $f(1) = -3 \times 1 + 5 = 2$.

D'où le tableau de valeurs :

x	0	1
$f(x)$	5	2

La droite représentative de f est la droite qui passe par les points $(0; 5)$ et $(1; 2)$.

Représentation graphique de f



Problème A

1

$$\begin{aligned}
 F &= (x+3)(2x+5) + 4x^2 - 25 \\
 &= x \times 2x + x \times 5 + 3 \times 2x + 3 \times 5 + 4x^2 - 25 \quad (\text{on a développé } F) \\
 &= 2x^2 + 5x + 6x + 15 + 4x^2 - 25 \\
 &= 15 - 25 + 5x + 6x + 2x^2 + 4x^2 \\
 &= -10 + 11x + 6x^2 \quad (\text{on a réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de } x)
 \end{aligned}$$

2 Factorisons F .

$$\begin{aligned}
 F &= (x+3)(2x+5) + 4x^2 - 25 \\
 &= (x+3)(2x+5) + \underbrace{(2x)^2 - 5^2}_{a^2 - b^2} \\
 &= (x+3)(2x+5) + \underbrace{(2x-5)(2x+5)}_{(a-b)(a+b)} \\
 &= \underbrace{(x+3)}_a \underbrace{(2x+5)}_k + \underbrace{(2x-5)}_b \underbrace{(2x+5)}_k \quad \text{c'est de la forme } k \times a + k \times b \text{ avec } k = 2x+5 \\
 &= (2x+5)[(x+3) + (2x-5)] \\
 &= (2x+5)[x+3+2x-5] \\
 &= (2x+5)(3x-2)
 \end{aligned}$$

3 a. q est définie pour toutes les valeurs de x , sauf celles où le dénominateur s'annule c'est à dire : q est définie si et seulement si $3x-2 \neq 0$.

Résolvons l'équation : $3x-2=0$.

$$3x-2=0 \iff 3x=2$$

$$\iff x = \frac{2}{3}$$

Donc l'ensemble de définition de q est l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

b. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$,

$$q(x) = \frac{(2x+5)(3x-2)}{3x-2} = 2x+5$$

4 Pour $x = \sqrt{3}$,

$$\begin{aligned}
 E &= 6 \times (\sqrt{3})^2 + 11 \times \sqrt{3} - 10 \\
 &= 6 \times 3 + 11\sqrt{3} - 10 \\
 &= 18 - 10 + 11\sqrt{3} \\
 &= 8 + 11\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

B) Activités géométriques (10 points)

Exercice 1

a. Faux

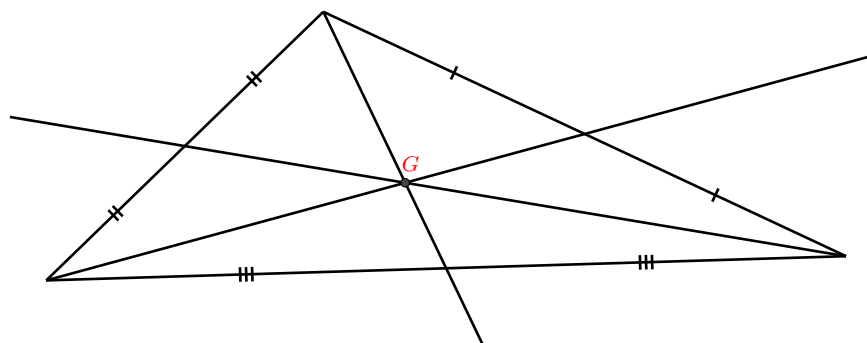
b. Vrai

Quelques rappels

Médiane et centre de gravité

Une médiane d'un triangle est une droite qui joint un sommet de ce triangle au milieu du côté opposé.

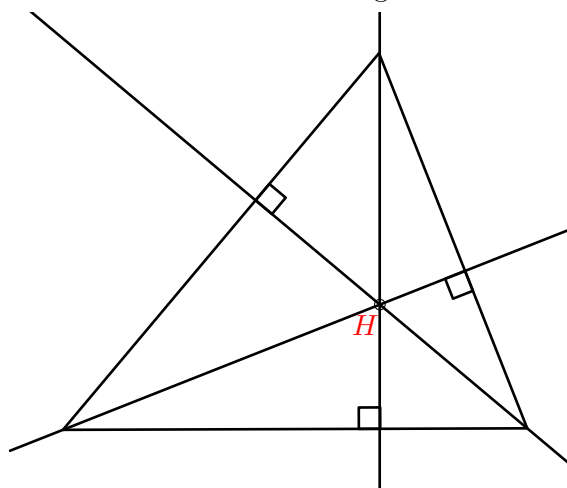
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé **centre de gravité du triangle**.



Hauteur et orthocentre

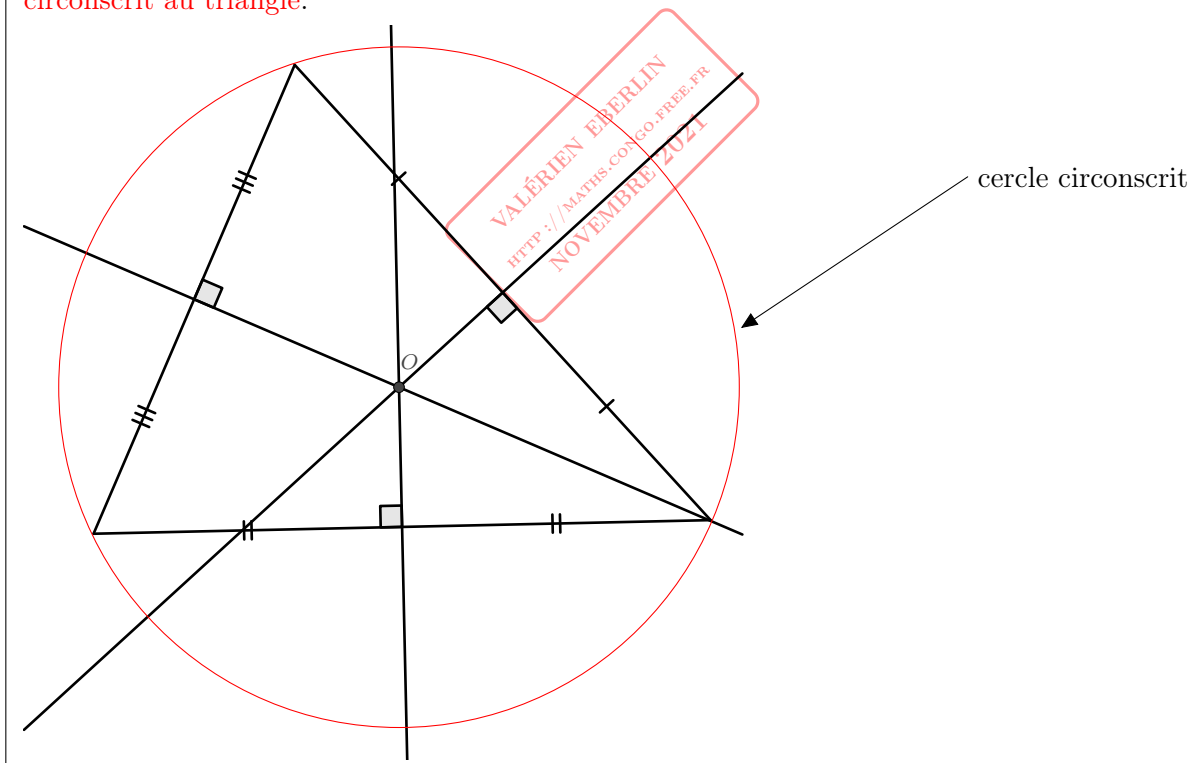
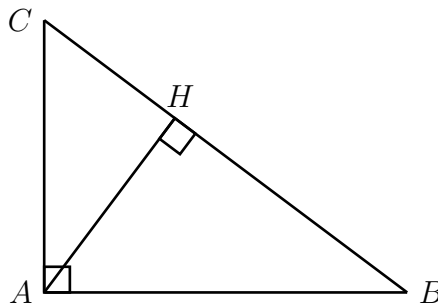
Une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre du triangle**.



Médiatrice et centre du cercle circonscrit

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment en son milieu perpendiculairement. Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point appelé **centre du cercle circonscrit au triangle**.

**Exercice 2****a.****b.** Calcul de BH

- Dans le triangle ABC rectangle en A , $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.
- Dans le triangle ABH rectangle en H , $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{4}$.

Or $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$. On en déduit que $\frac{4}{5} = \frac{BH}{4}$.

D'où $BH = \frac{4 \times 4}{5} = 3,2 \text{ cm}$.

Calcul de CH

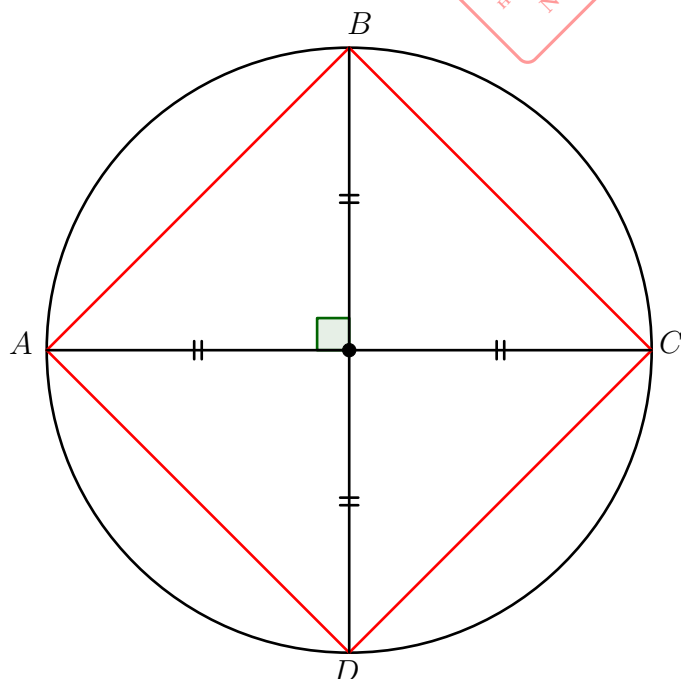
$$CH = BC - BH$$

$$= 5 - 3,2$$

$$= 1,8 \text{ cm}$$

Exercice 3

a.



b. Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Preuve

- Données

Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$:

- de même longueur (car $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres du cercle $(\mathcal{C})$) ;
- perpendiculaires ;
- et qui se coupent en leur milieu (car $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres du cercle $(\mathcal{C})$) ;.

- Propriété

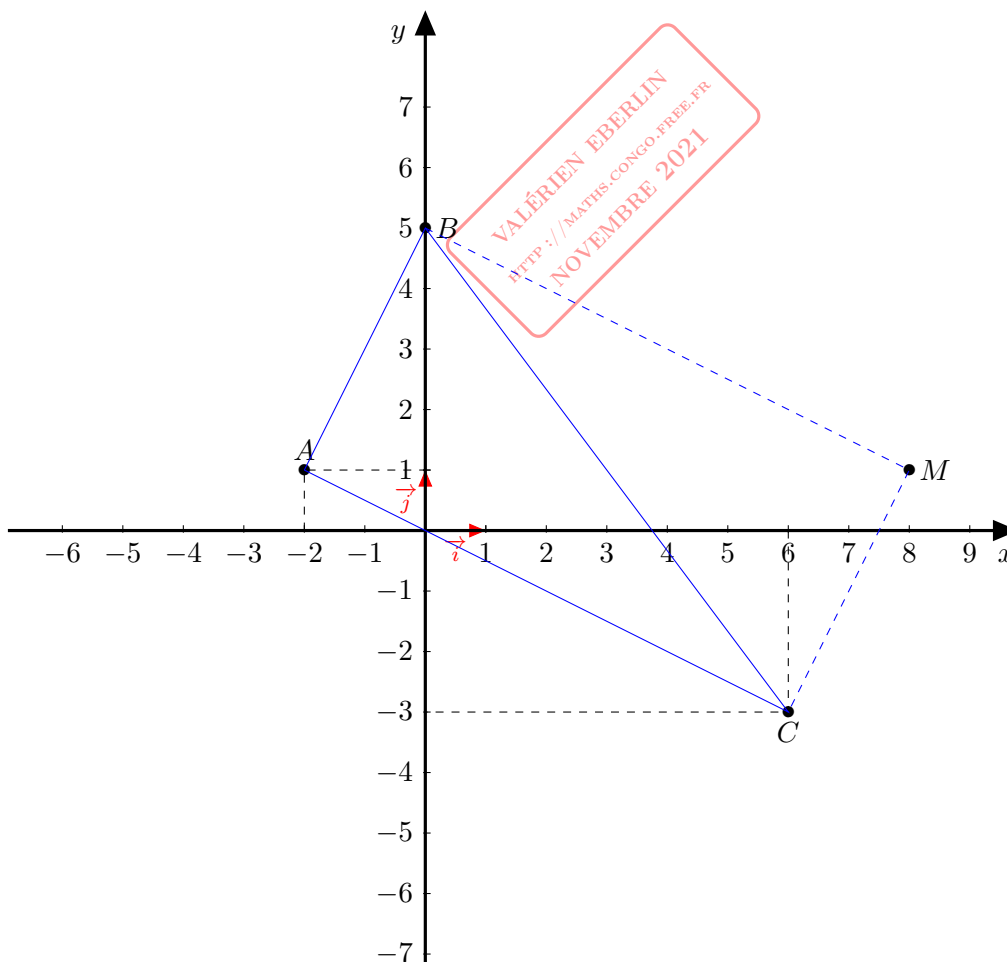
Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et qui se coupent perpendiculairement en leur milieu alors c'est un carré.

- Conclusion

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Problème B

1



2

$$\begin{aligned} BC^2 &= 10^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 \\ &= 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} \\ &= 2^2 \times (\sqrt{5})^2 + 4^2 \times (\sqrt{5})^2 \\ &= 4 \times 5 + 16 \times 5 \\ &= 20 + 80 \\ &= 100 \end{aligned}$$

J'en déduis que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

3

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 6 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$.

4 Le quadrilatère $ABMC$ est un rectangle.

Preuve

- Données

- Le quadrilatère $ABMC$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$
- De plus, les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires (d'après la question 2.).

- Propriété

Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

- Conclusion

Donc le quadrilatère $ABMC$ est un rectangle.

