

Corrigé - B.E.P.C 2015 - Mathématiques

A) Activités numériques et diverses (10 points)

Exercice 1

Sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$, on en déduit que $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}|$.
Or $2 - \sqrt{5} < 0$ et $-2 + \sqrt{5} > 0$. Donc $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = -2 + \sqrt{5}$

Exercice 2

1^{ère} méthode : méthode de substitution

- On utilise l'une des équations pour exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre.
- On remplace, dans l'autre équation, cette inconnue par l'expression trouvée. On obtient une équation à une inconnue que l'on sait résoudre.
- On en déduit ensuite la valeur de la deuxième inconnue.

➤ De l'équation (1) : $x - 2y = -7$, on en déduit que $x = 2y - 7$.

➤ Dans l'équation (2) : $4x + 3y = 27$, en remplaçant x par $2y - 7$, on obtient :

$$\begin{aligned}4(2y - 7) + 3y &= 27 \\4 \times 2y - 4 \times 7 + 3y &= 27 \\8y - 28 + 3y &= 27 \\8y + 3y &= 27 + 28 \\11y &= 55 \\y &= \frac{55}{11} \\y &= 5\end{aligned}$$

➤ On détermine la valeur de x en remplaçant y par sa valeur ($y = 5$) dans l'une des deux équations, par exemple dans l'équation (1) : $x - 2y = -7$.

On obtient :

$$\begin{aligned}x - 2 \times 5 &= -7 \\x - 10 &= -7 \\x &= -7 + 10 \\x &= 3\end{aligned}$$

Le système a donc pour solution , l'ensemble $S = \{(3; 5)\}$.

2^{ème} méthode : méthode par combinaison

- On multiplie chaque équation par un nombre afin que les coefficients de x (ou de y) soient les mêmes.
- On soustrait terme à terme les 2 équations pour éliminer x .
- On obtient une équation du 1^{er} degré à une inconnue que l'on résout.
- On remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations puis on calcule la valeur de la seconde inconnue.

$$\text{➤ } \begin{cases} x - 2y = -7 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases} \begin{matrix} \times 4 \\ \times 1 \end{matrix} \iff \begin{cases} 4x - 8y = -28 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

$$\text{➤ } \begin{array}{r} 4x - 8y = -28 \\ - (4x + 3y = 27) \\ \hline -11y = -55 \end{array}$$

➤ De l'équation $-11y = -55$, on en déduit que $y = \frac{-55}{-11} = 5$.

➤ En remplaçant y par sa valeur ($y = 5$) dans l'une des deux équations, par exemple dans l'équation (1) : $x - 2y = -7$, on obtient :

$$\begin{aligned} x - 2 \times 5 &= -7 \\ x - 10 &= -7 \\ x &= -7 + 10 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Le système a donc pour solution l'ensemble $S = \{(3; 5)\}$.

Exercice 3

a. f étant de la forme $ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 5$, est une fonction affine. Elle est donc définie pour toutes les valeurs de x .

D'où l'ensemble de définition de f est l'ensemble $\mathbb{R} =] - \infty ; +\infty[$.

b. f étant une fonction affine, alors sa représentation graphique est une droite.

Tableau de valeurs de f

Pour $x = 0$, $f(0) = 5$

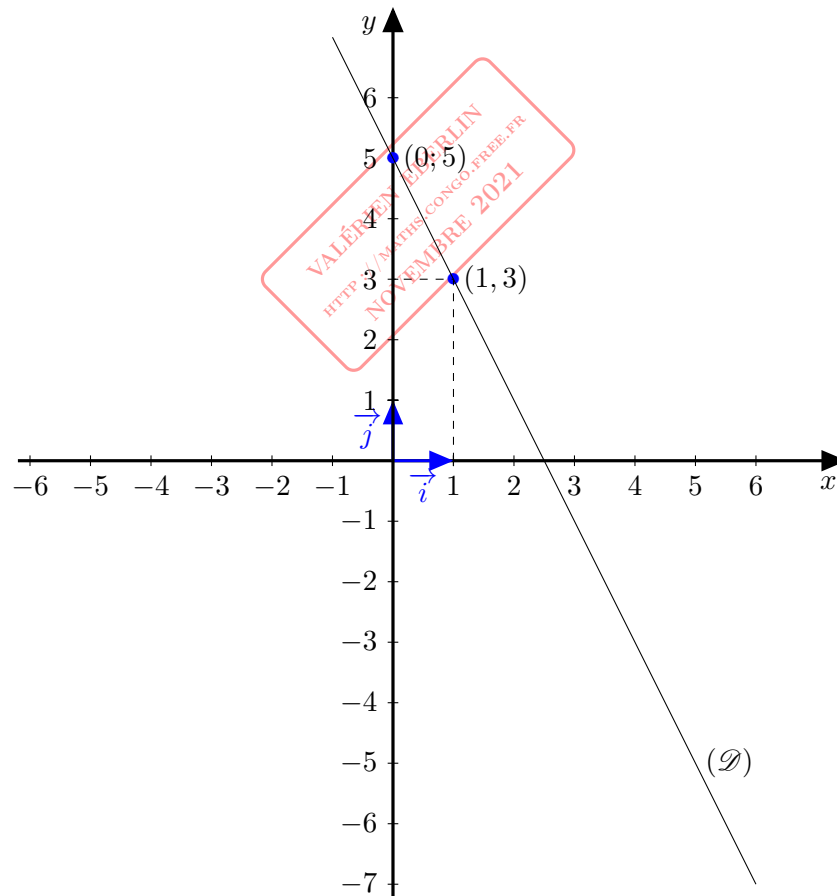
Pour $x = 1$, $f(1) = -2 \times 1 + 5 = 3$.

D'où le tableau de valeurs :

x	0	1
$f(x)$	5	3

La droite représentative de f est la droite qui passe par les points $(0; 5)$ et $(1; 3)$.

Représentation graphique de f



Problème A

1

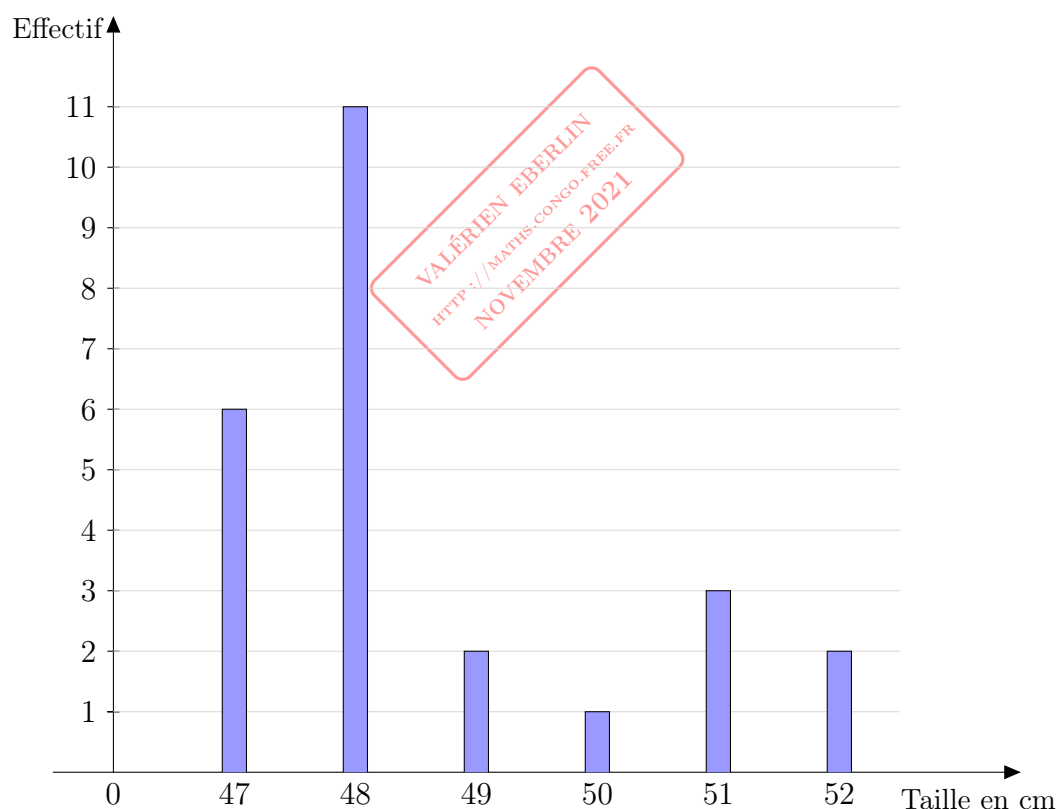
Taille en cm	47	48	49	50	51	52
Effectif	6	11	2	1	3	2
Effectifs cumulés décroissants	25	19	8	6	5	2

2 L'effectif total est 25.

3 La moyenne de la série statistique est :

$$\text{Moyenne} = \frac{47 \times 6 + 48 \times 11 + 49 \times 2 + 50 \times 1 + 51 \times 3 + 52 \times 2}{25} = \frac{1215}{25} = 48,6$$

4



B) Activités géométriques (10 points)

Exercice 1

a. Vrai

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} - x_{\overrightarrow{CD}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

$$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} - x_{\overrightarrow{CD}} \times y_{\overrightarrow{AB}} &= \frac{1}{2} \times 2 - 3 \times \frac{1}{3} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b. Faux

Si le triangle ABC est rectangle en A , on aurait l'égalité de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercice 2

- a. mes $\alpha = 30^\circ$ (voir la colonne en rose ci-dessous, pour la détermination de l'angle α).
- b. mes $\beta = 60^\circ$ (voir la colonne en vert ci-dessous, pour la détermination de l'angle β).

Pour déterminer les angles remarquables, on peut utiliser le tableau trigonométrique des valeurs remarquables ci-dessous :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Voici une méthode pour retenir ce tableau

- Sur la ligne de la fonction sinus (en bleu), on écrit $\frac{\sqrt{0}}{2}$; $\frac{\sqrt{1}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{4}}{2}$.
- Sur la ligne de la fonction cosinus (en jaune), on écrit les nombres ci-dessus, mais dans l'ordre décroissant.

Ce qui donne :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Or $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$; $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

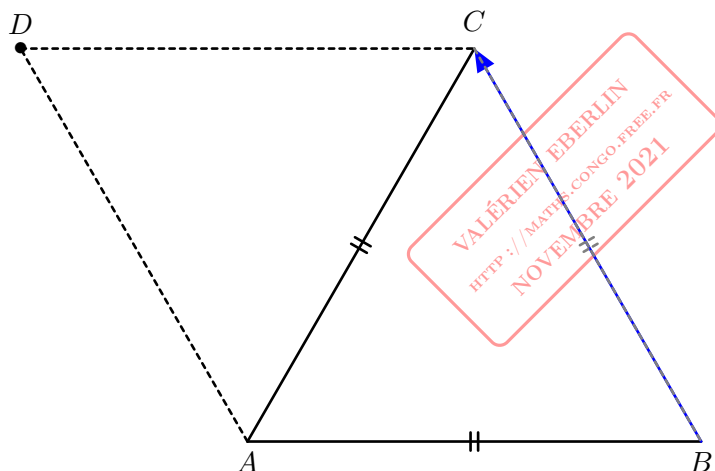
D'où le tableau trigonométrique des valeurs remarquables :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Exercice 3

a.

b. Le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Montrons d'abord que $ABCD$ est un parallélogramme

En effet, Comme D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ (c'est à dire $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$), alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

De l'égalité précédente, on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Montrons maintenant que $ABCD$ est un losange

- Données

On sait que :

- $[AB]$ et $[BC]$ sont deux côtés consécutifs du parallélogramme $ABCD$.
- De plus, $AB = BC$.

- Propriété

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.

- Conclusion

$ABCD$ est un losange.

Nous rappelons au candidat deux propriétés équivalentes, qui caractérisent le losange.

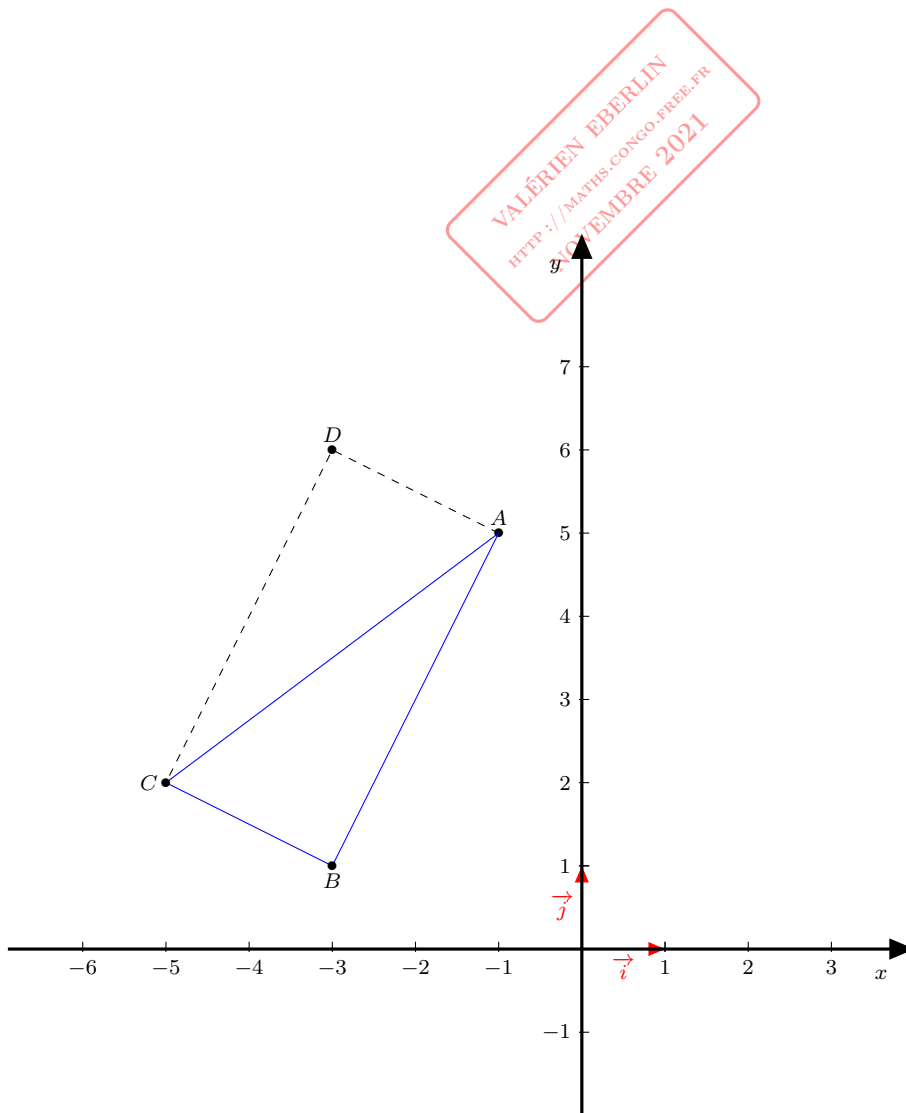
Propriété 1 : **si** un quadrilatère a ses 4 côtés de même longueur, **alors** c'est un losange.

Propriété 2 : **si** un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu, **alors** c'est un losange.

Pour cet exercice, nous utilisons la Propriété 1 pour justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Problème B

1



2

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (1 - 5)^2} \\
 &= \sqrt{(-3 + 1)^2 + (1 - 5)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 16} \\
 &= \sqrt{20} \\
 &= \sqrt{2^2 \times 5} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\
 &= \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (2 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(-5 + 3)^2 + (2 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 1} \\
 &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} \\
 &= \sqrt{(-5 + 1)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{16 + 9} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

**3**

$$\begin{array}{l|l}
 AC^2 = 5^2 & AB^2 + BC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2 \\
 = 25 & = 20 + 5 \\
 & = 25
 \end{array}$$

J'en déduis que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

4

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 1 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix}$

D'où le système d'équations : $\begin{cases} -5 - x_D = -2 \\ 2 - y_D = -4 \end{cases}$ que l'on résout aisément.

$$\begin{cases} -5 - x_D = -2 \\ 2 - y_D = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_D = -2 + 5 \\ -y_D = -4 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_D = 3 \\ -y_D = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \end{cases}$$

Les coordonnées du point D sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

