Annales du bac 2021

**Inclus sujet et corrigé du bac C 2020*

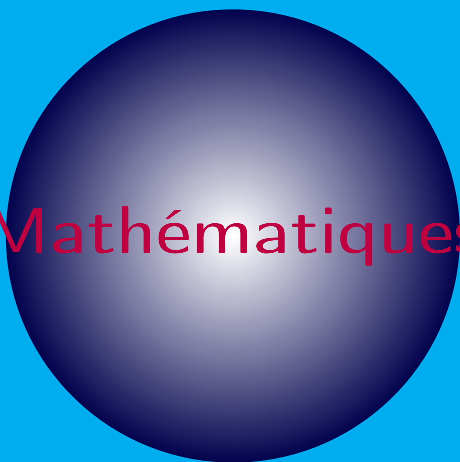
Mathématiques

Série C

Rép. du Congo

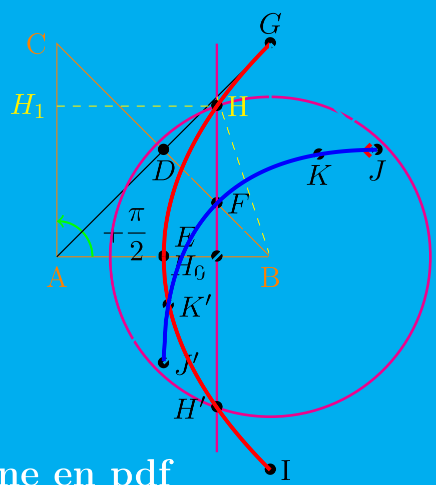
Valérien Eberlin

Professeur de mathématiques - France



$$\begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{k=n}\psi = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b \psi$$



- ✓ **Tous les sujets du bac 2009 - 2020**
- ✓ **Des corrigés clairs et détaillés**
- ✓ **Des hyperliens pour une meilleure navigation interne en pdf**

SOMMAIRE

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Sujet bac 2009 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 5 points

On considère la famille (S) des suites (V_n) de premiers termes V_0 et V_1 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$$

1 **a.** Déterminer les suites géométriques (a_n) et (b_n) de (S) de premier terme 1.

b. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$ où α et β sont des réels, est dans (S).

2 **a.** Déterminer les entiers relatifs α et β solutions de l'équation : $8\alpha - 27\beta = -11$.

b. Déterminer l'entier relatif k pour que le couple $(\alpha; \beta)$ défini par $\alpha = 110 + 27k$ et $\beta = 33 + 8k$ soit solution de l'équation : $4\alpha + 9\beta = 17$.

c. En déduire les valeurs des entiers relatifs α et β pour lesquelles $U_2 = 17$ et $U_3 = -11$.

d. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n \equiv 3.2^n\,[5]$.

e. Déduire le reste de la division euclidienne du terme U_n par 5.

3 Soit $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ et $S_n = W_0 + \cdots + W_n$.

a. Démontrer que $S_n \equiv 2 - 4(2)^n\,[5]$

b. Déduire le reste de la division euclidienne de la somme de S_{1956} par 5.

Exercice 2 4 points

Le plan rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0 \qquad (E)$$

2 Écrire les solutions z' et z'' de (E) sous leur forme trigonométrique.

Problème 11 points

Dans le plan $(\mathscr{P})$ orienté, on considère les points A, O, B, dans le sens tels que $AB = 6$ et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$.

Partie A

I
1. Construire les points I et J tels que : $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$ et $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$.
2. Construire le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre $[IJ]$.

II
1. Construire la droite $(\mathscr{T})$ passant par A telle que $((\mathscr{T}), (AB)) = 60°$.
2. Construire le cercle $(\mathscr{C}_2)$ passant par A et B dont la tangente en A est $(\mathscr{T})$.
3. Démontrer que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont deux points communs Ω_1 et Ω_2 situés de part et d'autre de la droite (AB). On notera Ω_1 celui situé dans le plan de frontière (AB) contenant le centre E du cercle $(\mathscr{C}_2)$.

III
1. Démontrer que le centre de la similitude S d'angle de mesure $60°$, de rapport $\frac{1}{2}$ et qui transforme A en B est le point Ω_1.
2. Démontrer que les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

I
1. Soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB).
   a. Démontrer que J est le centre de gravité du triangle EFB.
   b. Démontrer que $EJ = BK$ et $(\overrightarrow{\overrightarrow{EJ}}, \overrightarrow{\overrightarrow{BK}}) = 60°$, K désignant le centre du cercle $(\mathscr{C}_1)$.
   c. En déduire qu'il existe une rotation R qui transforme E en B et J en K.
2. Démontrer que les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se rencontrent en Ω_1. En déduire le centre de R.

II Soit $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R$, où R est la rotation de I.c) et $T_{\overrightarrow{BA}}$ la translation du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. Démontrer que les points Ω_1, J et F sont alignés.
2. Démontrer que le centre de rotation de g est F.

Partie C

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de centre J, dont un des foyers est I et passant par A.

1 Construire le point M de $(\mathscr{H})$ situé sur le segment $[I\Omega_1]$ ainsi que ses deux sommets.

2 Démontrer que les droites (JE) et $(F\Omega_1)$ sont les asymptotes de $(\mathscr{H})$. Tracer la branche de $(\mathscr{H})$ située dans le plan de frontière la droite $(B\Omega_1)$ contenant K.

3 On désigne par $(\mathscr{H}')$ l'image de $(\mathscr{H})$ par S.
   a. Démontrer que l'excentricité e de $(\mathscr{H}')$ est 2.
   b. Déterminer les sommets et les asymptotes de $(\mathscr{H}')$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Sujet bac 2010 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

1 **a.** Montrer que les équations $x^2 \equiv -1\,[25]$ et $x^2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont équivalentes.

b. Pour $k = 2$, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -1\,[25]$.

2 **a.** Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de $2^n - 4$ par 5.

b. En déduire le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5.
Que peut-on alors dire de la divisibilité de $2^{2010} - 4$ par 5 ?

Exercice 2 5 points

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O. I et J sont des milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AD]$.

1 Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

2 On note $(\mathscr{D})$ la droite passant par A telle que $\overline{((AC), (\mathscr{D}))} = \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$. $(\mathscr{D})$ coupe (Γ) en E.

a. Montrer que le triangle EAC est équilatéral.

b. En déduire qu'il existe une rotation r de centre E qui transforme A en C.

3 On désigne par H le centre de gravité du triangle EAC. La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (EA) et (EC) respectivement en G et F.

a. Montrer que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

b. Montrer qu'il existe une homothétie de centre E qui transforme A en G et C en F.

c. En déduire qu'il existe une similitude plane directe S de centre E qui transforme A en F.

Problème 11 points

Partie A

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$.

2 Déterminer la solution particulière g vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

Partie B

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin \pi x & \text{si} \quad -4 \leq x \leq 0 \\ x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln x\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

3 **a.** Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.

b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

c. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4 **a.** Étudier les variations de f sur I. On dressera un tableau résumant les variations de f.

b. Étudier la branche infinie de $(\mathscr{C})$ et tracer $(\mathscr{C})$ sur son ensemble de définition.

5 Calculer l'aire A_0 du domaine plan $(\mathscr{D})$ limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 1$, $x = \sqrt{e}$.

Partie C

6 Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $x > 0$, construire l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par S.

7 On définit la suite $(\mathscr{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{D}_0 = \mathscr{D} \\ \mathscr{D}_{n+1} = S(\mathscr{D}_n) \end{cases}$$

a. Exprimer l'aire A_n du domaine $(\mathscr{D}_n)$ en fonction de n et A_0.

b. Exprimer la somme $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n et A_0.

c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Sujet bac 2011 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 3 points

On pose $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduire des questions 1. et 2., les valeurs de A et B.

Exercice 2 5 points

On donne en milliers de francs CFA le bénéfice d'une ferme avicole qui importe des poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_j (en milliers de francs)	96,1	63,5	49,2	41,5	35,7

1. Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 mois en abscisses et 2 cm pour 5 milliers de francs en ordonnées.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3. Tracer cette droite sur le graphique.
   Estimer le bénéfice de la ferme avicole au 6 ème mois.

Problème 12 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle tel que $AC = 2\,AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$. On prendra $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm. On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés $ACFG$ et $ABDE$ tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

K est le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$.
Les droites (AK) et (BC) se coupent en I.
Les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

Partie A

1 Faire une figure.

2 Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme le triangle ABC en le triangle EAK.
On note Ω_1 son centre. Construire Ω_1. Donner l'angle de R_1.

3 Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme le triangle ABC en le triangle GKA. Donner l'angle de R_2.
On note Ω_2 son centre. Construire Ω_2.

4 **a.** On considère l'application $f = R_1 \circ R_2$. Montrer que f est une translation.
b. Calculer $f(C)$. En déduire le vecteur de translation de f

5 Démontrer que les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, milieu du segment $[AB]$.

6 Démontrer que les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O', milieu du segment $[AG]$.

Partie B

On rapporte maintenant le plan au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\overrightarrow{AE}$.
Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

7 Donner les éléments caractéristiques de S.

8 Donner l'écriture complexe de la similitude S.

9 Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

Partie C

Soit $(\mathscr{E})$ l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$.

10 Construire $(\mathscr{E})$ tout en précisant son centre, ses sommets et foyers.

11 Déterminer une équation de $(\mathscr{E}')$ image de $(\mathscr{E})$ par S.

Sujet bac 2012 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 3 points

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.

2 On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{2}$; $z_C = -2i$ et $z_D = 2\sqrt{2}$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$.

b. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 2 5 points

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

1 Calculer I_1.

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

3 Par une intégration par parties, montrer que $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ (On pourra écrire $x^n = x^{n-1}.x$).

4 Étudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente et converge vers une limite l.

5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Calculer l.

Problème 12 points

Le plan $\mathscr{P}$ est orienté. $ABCD$ est un carré de sens direct, de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

1 E est le point du plan tel que le triangle IDE soit rectangle isocèle en D et de sens direct. Montrer que $IE = AO$.

2 En déduire qu'il existe une rotation r transformant I en A et E en O. Préciser une mesure θ de l'angle de la rotation r.

3 Construire Ω le centre de la rotation r.

4 On désigne par Ω_1, le point d'intersection des droites (IE) et (OA). Montrer que les points Ω, E, O, Ω_1 sont situés sur un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on tracera.

5 Montrer que $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.

6 Donner les caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme le carré $ABCD$ en $A\Omega_1 I\Omega$.

7 Placer $K' = S(K)$ puis $L' = S(L)$.

8 Soit $\overline{S} = h_{(Q,\frac{1}{2})} o\, S_{OD}$, Q étant un point de la droite (OD). Caractériser $\overline{S}$.

9 On se propose de construire Q sachant que $\overline{S}(C) = J$.

- **a.** Montrer que si $\overline{S}(C) = J$ alors $\overrightarrow{QJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.
- **b.** Construire alors le point Q.

10 Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HM}$, H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (OE).

- **a.** Caractériser f.
- **b.** Tracer $(\mathscr{C}')$ l'image de $(\mathscr{C})$ par f.
- **c.** Donner la nature de la courbe $(\mathscr{C}')$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Sujet bac 2013 - Série C

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On considère l'équation complexe (E) telle que

$$(E)\ :\ z^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1=0$$

1. Montrer que -1 est solution de (E).
2. Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors son inverse $\frac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que $(E')\ :\ z^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1=0$.
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 4 points

Les caractères X et Y sont distribués suivants le tableau ci-dessous.

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

1. Transformer ce tableau en un tableau à double entrées d'effectifs n_i.
2. Déterminer le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$.
3. Calculer les variances $\mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{V}(Y)$ de X et Y.
4. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Problème 12 points

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=90°$ et $AD=2$. On désigne par $(\mathscr{P}_1)$ la parabole de directrice la droite (AD) et tangente en C à la droite (AC).

1. Démontrer que le foyer de $(\mathscr{P}_1)$ est B.

Soit $(\mathscr{P}_2)$ la parabole de foyer B et tangente à la droite (AD) en D, E le symétrique de B par rapport à A, F le symétrique de D par rapport à la droite (AB).

2 Démontrer que la droite (EF) est la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.

3 Construire le deuxième point H de $(\mathscr{P}_2)$ appartenant à la droite (DB).

4 Comment appelle-t-on le segment $[DH]$ pour la parabole $(\mathscr{P}_2)$? Justifier la réponse.

5 Démontrer que le point I symétrique de C par rapport à (BE) appartient à $(\mathscr{P}_1)$.

6 Construire les arcs des paraboles $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ de cordes respectives $[CI]$ et $[DH]$.

Soit S la similitude plane directe qui transforme $(\mathscr{P}_2)$ en $(\mathscr{P}_1)$.

7 Déterminer une mesure θ de l'angle de S. Justifier la réponse.

8 Déterminer son rapport k. Justifier la réponse.

9 Déterminer son centre. Justifier la réponse.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ où J est le milieu de $[AB]$, on considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln(x+1)$.
$(\mathscr{C})$ désigne sa courbe représentative dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.

10 Dresser le tableau de variation de f.

11 Étudier la branche infinie de $(\mathscr{C})$.

12 Construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.

13 Calculer l'aire de la portion du plan $(\mathscr{E})$ limitée par les droites (JO), (BC) et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P}_1)$. On montrera que l'équation cartésienne de $(\mathscr{P}_1)$ dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ est $y^2 = 4x$.

Sujet bac 2014 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

1 Soit (E) l'équation d'inconnue Z :

$$Z^2 - (2i\,\mathrm{e}^{i\theta}\cos\theta)Z - \mathrm{e}^{i\,2\,\theta} = 0 \quad \text{où} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = \mathrm{e}^{i\,(\frac{\pi}{2}+2\,\theta)}$.
On note Z_0 l'affixe de O.

a. Exprimer $arg(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0})$ en fonction de θ.

b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

c. On suppose que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 2 8 points

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 6\,\text{cm}$. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[BD]$.

1 Faire la figure.

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC).

2 **a.** Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?

b. Déterminer le pas α de $(\mathscr{P})$.

Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

3 **a.** Démontrer que la droite (AG) est une tangente à $(\mathscr{P})$ en un point à déterminer.

b. Construire le point H de $(\mathscr{P})$ situé sur la médiatrice du segment $[EB]$.

c. Construire l'arc $(\mathscr{P}_0)$ de $(\mathscr{P})$ de corde focale le segment $[GI]$ où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB).

Soit $(\mathscr{P}')$ la parabole de foyer B et de directrice (AG).

4 Déterminer le centre Ω, le rapport K et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S qui transforme $(\mathscr{P}')$ en $(\mathscr{P})$.

5 Construire l'antécédent J de G par S.

6 Construire l'arc $(\mathscr{P}'_0)$ qui a pour image $(\mathscr{P}_0)$ par S.

On désigne par A'_0 l'aire de la portion $(\mathscr{E}'_0)$ du plan limitée par les droites (JB), (EF) et $(\mathscr{P}'_0)$, et par A_0 celle de la portion du plan $(\mathscr{E}_0)$ image de $(\mathscr{E}'_0)$ par S.

7 Démontrer que $A_0 = 2A'_0$.

8 Déterminer l'aire A de $S \circ S \circ S \circ S(\mathscr{E}'_0)$ en fonction de A_0

Exercice 3 — 4 points

Soit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

1 Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n.

2 On suppose que n est impair.

- **a.** Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
- **b.** Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n}.
- **c.** Dresser le tableau de variation de f_n.

3 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^p f_n(x)dx$ et $J_n = \lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$.

- **a.** En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+2)J_n$.
- **b.** En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0.

Exercice 4 — 4 points

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.
La variable aléatoire X est celle qui détermine «la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis»

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Calculer l'expérance mathématiques, la variance et l'écart-type de X.

Sujet bac 2015 - Série C

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$

1 **a.** Montrer que cette équation admet au moins une solution.

b. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') \;:\; 21x \equiv 4[17]$.

2 On se propose de résoudre l'équation (E'). On rappelle qu'un entier relatif a est l'inverse modulo n $(n \in \mathbb{N})$ d'un entier relatif b si $ab \equiv 1[n]$.

a. Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.

b. Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

3 En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2 8 points

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[AD]$.
On prendra $AB = 4$ cm.

1 Faire une figure.

2 On considère l'ellipse $(\mathscr{E})$ de centre Ω, d'excentricité $\dfrac{1}{2}$ dont un foyer est B et une directrice (AD). Quel est l'axe focal de $(\mathscr{E})$?

3 Soit S_1 et S_2 les points de $(\mathscr{E})$ situés sur la droite (AB).

a. Montrer que $\overrightarrow{BS_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$

b. Placer S_1 et S_2.

4 Tracer le cercle principal $(\mathscr{C}_p)$ de $(\mathscr{E})$.

5 Tracer le cercle secondaire $(\mathscr{C}_s)$ de $(\mathscr{E})$.

6 Tracer le cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$ de $(\mathscr{E})$ ayant pour centre le foyer B.

7 Construire le point de $(\mathscr{E})$ situé sur la demi-droite $[BC)$.

8 Tracer l'arc de $(\mathscr{E})$ balayé par l'angle $(\overrightarrow{\Omega S_3}, \overrightarrow{\Omega B})$ où S_3 est un sommet de $(\mathscr{E})$ situé sur l'axe non focal et du même côté que C.

9 Soit f la transformation plane définie par : $f = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.

a. Qu'appelle-t-on symétrie glissée ?

b. Montrer que f est une symétrie glissée. Déterminer son vecteur et son axe.

c. Tracer $(\mathscr{E}')$ l'image de $(\mathscr{E})$ par f.

Exercice 3 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x\ln x}{x}$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$.
Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de α.
Soit g la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

On définit la suite numérique (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1 Sachant que $f(\alpha) = 0$, montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.

2 Montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \in I$.

3 On suppose que pour tout x de I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4 **a.** Montrer que : $\forall n \geq 0,\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b. En déduire que $\forall n \geq 0,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers α.

5 **a.** Déterminer un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-1}$.

b. Déterminer la valeur approchée u_{n_0} de α.

Exercice 4 — 3 points

Une maladie atteint 3 % d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95 % de tests sont positifs et 5 % sont négatifs.
- Chez les individus non malades, 1 % de tests sont positifs et 99 % négatifs.

On note :

- M l'évènement : « être malade » et,
- T l'évènement : « le test est positif ».

1 Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2 Donner la probabilité de l'évènement « $M \cap T$ », puis celle de « $\overline{M} \cap \overline{T}$ ».

3 Déterminer $P(T)$ et $P(\overline{T})$.

4 **a.** Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.

b. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.

Sujet bac 2016 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On donne dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E)\ :\ 2688x + 3024y = -3360$$

1 Déterminer le PGCD $(2688, 3024)$, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2 Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E_1)\ :\ 8x + 9y = -10$.

3 **a** Montrer que l'équation (E_1) peut s'écrire $(E_2)\ :\ 8x \equiv -10\,[9]$.

b Résoudre l'équation (E_2).

c En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 8 points

Le plan est orienté.
$ABCD$ est un rectangle tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On considère le losange $BDEG$ tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})\,[2\pi]$.
Dans cet exercice, S_Δ et $t_{\overrightarrow{u}}$ désignent respectivement la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
On considère la transformation

$$f = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$$

1 Faire la figure. On prendra $AB = 4$ cm et on disposera (AB) horizontalement.

2 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$.

3 R désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer la nature exacte de la transformation $S_{(AD)} \circ R$.

4 On désigne par F le milieu du segment $[BG]$.

a. Démontrer que $f = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.
Erreur dans l'énoncé : il s'agit plutôt de montrer $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$. En effet, la transformation f n'est pas égale à $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de f.
Substituer cette question par : Déduire les éléments caractéristiques de $S_{(AD)} \circ R$.

5 Soit $(\mathscr{P})$ la parabole dont une tangente est la droite (EF), la normale associée est la droite (GB) et l'axe focal est la droite (EB).
Démontrer que A est le foyer de la parabole $(\mathscr{P})$.

6 Soit H le milieu du segment $[EG]$ et L celui du segment $[ED]$. Déterminer la directrice (d) de la parabole $(\mathscr{P})$.

7 Construire le point I de $(\mathscr{P})$ tel que $[IF]$ soit une corde focale.

8 Construire la corde focale $[JK]$ de $(\mathscr{P})$ où J appartient au segment $[AD]$.

9 Construire l'arc d'extrémités J et F de $(\mathscr{P})$.

10 Soit $(\mathscr{P}')$ l'image de $(\mathscr{P})$ par la transformation f.

- **a.** Déterminer le foyer de la parabole $(\mathscr{P}')$.
- **b.** Déterminer l'axe focal de $(\mathscr{P}')$.

Exercice 3 — 5 points

1 Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\quad y'' + 2y' + 2y = 0$$

vérifiant les conditions initiales suivantes : $f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2 On pose $f(x) = e^{-x}\sin x$

- **a.** Déterminer les réels A et B pour que $F(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$.

3 Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n\ ;\quad n \in \mathbb{N}$$

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- **b.** Calculer la somme des termes $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 4 — 3 points

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

X \ Y	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1 Convertir ce tableau en un tableau linéaire.

2 Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ des caractères X et Y.

On donne $\overline{X} = 1,6$ et $\overline{Y} = 1$.

3 Donner une interprétation géométrique de cette corrélation.

Sujet bac 2017 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $48x + 35y = 1$.

a Justifier à l'aide du théorème de Bézout que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b Justifier que les entiers 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c En remarquant que (E) peut s'écrire $48x \equiv 1[35]$, déterminer une solution particulière (x_0, y_0).

d Achever la résolution de l'équation (E).

Exercice 2 8 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de centre de gravité E.

1 Faire une figure. On prendra $AB = 4$ cm.

2 Construire le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A passant par B.

3 Construire le point F symétrique de A par rapport à E.

4 Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal $(\mathscr{C})$ et dont une directrice est la droite (BC).

5 Montrer que F est un foyer de (Γ). Préciser son axe focal.

6 On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC), et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{AG}$.

a. Construire H.

b. On pose $AF = c$ et $AB = a$. Que représente le rapport $\dfrac{AF}{AB}$ pour (Γ) ?

Montrer que ce rapport est égal à $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

7 Construire le point I du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \dfrac{c}{a}\overrightarrow{GH}$.

8 Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H. Construire le point J de (Γ) situé sur (d) et situé dans le demi plan délimité par la droite (AH) contenant le point C.

9 On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F.
Construire l'arc $(\mathscr{H})$ de (Γ) d'extrémités J et S.

10 On désigne par s la similitude plane indirecte définie par : $s = h \circ S_{(BC)}$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe (Δ) et le centre (Ω) de s.

b. Construire l'arc $(\mathscr{H}')$, image de $(\mathscr{H})$ par s.

c. Déterminer l'excentricité de (Γ') image de (Γ) par s.

Exercice 3 5 points

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.

On pose pour tout $x \geq 0$, $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1 **a.** Prouver que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F sur I.

2 On admet que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

a. Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

Erreur dans l'énoncé : L'inégalité $F(x) \geq \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ pour tout $x \geq 2$ est fausse.

Substituer cette question par :

Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variation de F.

d. Donner l'allure de la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction F dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On donne $F(0) = 0,13$; $F(2) = 0,5$.

3 Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$.

a. Vérifier que $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.

Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 3 points

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de 0,7 ;
- s'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de 0,8 ;
- s'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de 0,4.

On note R_1 l'événement « premier tir au but est réussi »et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».

1 Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.

2 Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.

3 Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.

4 On note A, l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer $P(A)$.

Sujet bac 2018 - Série C

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On considère le système d'équation (S) défini par :

$$(S)\ :\ \begin{cases} x \equiv 2\,[36] \\ x \equiv 3\,[25] \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S) est équivalent à l'équation (E) : $36a - 25b = 1$ où a et b désignent des entiers relatifs.
2. Vérifier que le couple $(-9, -13)$ est une solution de E.
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $36a \equiv 1\,[25]$.
4. Donner l'inverse modulo 25 de 36.
5. En déduire les solutions de (E').
6. **a.** Déterminer les solutions de l'équation (E).

   b. En déduire les solutions du système (S) telles que $0 < x < 50$.

Exercice 2 8 points

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
E, F, G et H désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.
$(\mathscr{C}_1)$ est le cercle circonscrit au triangle ABD.
I est le symétrique de O par rapport à G.

1. Faire une figure que l'on complétera. On prendra $AB = 4$ cm et on placera (AB) horizontalement.
2. Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré $ABCD$ et d'axe non focal la droite (EG).

   a. Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite $[OF)$.

   b. Préciser la directrice $(\mathscr{D})$ de (Γ) associée au foyer J.

   c. Construire le point K de (Γ) situé sur le segment $[JB]$.

   d. Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.

   e. Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.

3 Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (AC) de rapport 2, qui transforme le point F en le point I.
Démontrer que son centre est O.

4 Soit (Γ') l'image de (Γ) par S.

a. Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère.

b. Trouver l'excentricité de (Γ').

c. Construire le cercle principal $(\mathscr{C}_2)$ de (Γ').

d. Démontrer que (Γ) et (Γ') ont les mêmes asymptotes.

e. Déterminer l'axe focal de (Γ').

f. Construire l'image J' du foyer J de (Γ).

g. Construire l'image $(\mathscr{C}_1')$ du cercle $(\mathscr{C}_1)$ par S.

h. Construire l'image (Γ_0') de (Γ_0) par S.

Exercice 3 5 points

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $\left]0\,,\,+\infty\right[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1 Calculer la dérivée g' de g.

2 Dresser le tableau de variation de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3 **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = e^x - \ln x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4 Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

5 Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

6 **a.** Dresser le tableau de variation de f. On admet que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

b. Montrer que f admet un minimum $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

7 Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. On prendra $\alpha = 0,6$ et $f(\alpha) = 2,3$.

Exercice 4 3 points

Soit la série statistique à deux caractères (X, Y) donnée par le tableau à double entrée ci-dessous.

X \ Y	-1	2	3
2	2	0	3
3	1	3	4

1 Déterminer les série marginales de X et Y.

2 Déterminer les coordonnées $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.

3 On admet que la variance de X est $\dfrac{10}{169}$ et celle de Y est $2,59$.

a. Montrer que la covariance de X et Y est égale à $\dfrac{29}{169}$.

b. Montrer que la droite de régression linéaire de Y en X est : $Y = \dfrac{29}{40}X - \dfrac{1}{20}$.

Sujet bac 2019 - Série C

▶ Voir le corrigé. ▶Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1 Déterminer le PGCD de 109 et 226.

2 Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?

3 Vérifier que 141 est l'inverse de 109 modulo 226.

4 **a.** Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 109x \equiv 1[226]$.

b. Résoudre l'équation (E').

c. En déduire la solution de (E).

Modifier la question : « En déduire les solutions de (E). »

Exercice 2 8 points

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCE$ de sens direct, de centre O.
D est le symétrique orthogonal du point O par rapport à la droite (BC). K et O' sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[BC]$.
On désigne par G le symétrique du point C par rapport à B.

1 Faire une figure. On disposera $[BC]$ horizontalement, et on prendre $BC = 6$ cm.

2 Soit f la rotation qui transforme O en D et A en C.

a. Déterminer le centre de la rotation f.

b. Déterminer une mesure θ de l'angle de f.

c. Prouver que $f^{-1} = S_{(BO)} \circ S_{(BA)}$ où $S_{(BO)}$ et $S_{(BA)}$ désignent respectivement les symétries orthogonales d'axes (BO) et (BA), est la réciproque de f.

3 Soit $g = S_{(OD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{2})}$, $R_{(B,\frac{\pi}{2})}$ désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Justifier que g est une symétrie glissée.

b. Déterminer $g(B)$ et $g(C)$.

c. En calculant $(g \circ g)(B)$, montrer que le vecteur de g est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BO}$.

d. En déduire que l'axe de g est la droite (KO').

e. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $g(M) = f^{-1}(M)$.

4 Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'excentricité $e = 2$, de foyer C et de directrice associée (BA).

a. Soit J le point du plan, tel que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que G et J sont les sommets de $(\mathscr{H})$.

b. Placer le centre Ω de $(\mathscr{H})$.

c. Tracer les asymptotes (Δ_1) et (Δ_2) de $(\mathscr{H})$.

d. Tracer $(\mathscr{H}_0)$, la branche de l'hyperbole dont le sommet est J.

e. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
En utilisant la définition monofocale de $(\mathscr{H})$ appliquée au foyer C, montrer qu'une équation cartésienne de $(\mathscr{H})$ dans ce repère est : $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$.

Exercice 3 5 points

1 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = 0$.

2 Déterminer la solution particulière h de (E) qui admet en $x = 0$ un maximum égal à 1.
Modifier la question : « Déterminer la solution particulière h de (E) qui admet en $x = 0$ un extremum égal à 1. »

3 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. Déterminer la dérivée f' de f.

c. Étudier le sens de variation de f.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Trouver le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

f. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

g. Tracer $(\mathscr{C})$.

Exercice 4 3 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules noires. Dans chacune des urnes, les boules sont indiscernables au toucher.
On lance sur une table un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne U_1 ;
- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est strictement supérieur à 2, on tire une boule dans l'urne U_2.
On note $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ les événements suivants :

$\mathscr{U}_1$: « le tirage s'effectue dans l'urne U_1 »
$\mathscr{U}_2$: « le tirage s'effectue dans l'urne U_2 »
$\mathscr{B}$: « Obtenir une boule blanche »
$\mathscr{N}$: « Obtenir une boule noire »

1 **a.** Montrer que la probabilité de l'événement $\mathscr{U}_1$ est $\dfrac{1}{3}$.

b. En déduire la probabilité de l'événement $\mathscr{U}_2$.

2 Traduire par un arbre de probabilités, les données de l'énoncé.

3 Montrer que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\dfrac{8}{15}$.

4 On a tiré une boule noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne $\mathscr{U}_1$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Sujet bac 2020 - Série C

► Voir le corrigé. ►Retour au sommaire.

Exercice 1 4 points

On se propose de déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E_0) : $2x - 7y = 3$.

1. Montrer que l'équation (E_0) est équivalente à l'équation (E_1) : $2x \equiv 3\,[7]$.
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
4. On désigne par A l'ensemble des diviseurs positifs de 95.
   - **a.** Déterminer A.
   - **b.** Trouver le couple (x, y) vérifiant le système : $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Exercice 2 8 points

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O, de sens direct.
On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AJ]$, de centre O'.
P et Q sont les milieux respectifs des segments $[BJ]$ et $[AL]$.

1. Faire une figure avec $AB = 6$ cm.
2. Soit f la symétrie glissée d'axe (OL).
   - **a.** Déterminer le vecteur $\vec{u}$ de f, sachant que $f(D) = I$.
   - **b.** Déterminer $f(K)$.
3. Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole de rectangle fondamental $ABJL$ et d'axe focal (PQ).
   - **a.** Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{H})$.
   - **b.** Placer les foyers F et F' de $(\mathscr{H})$ (on notera F le foyer le plus proche de point P).
   - **c.** Déterminer les sommets de $(\mathscr{H})$.
   - **d.** Construire les directrices $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de $(\mathscr{H})$.
   - **e.** Construire le point M_0 de $(\mathscr{H})$ situé sur le segment $[FJ]$ (on justifiera la construction du point M_0).
   - **f.** Prouver que l'excentricité de $(\mathscr{H})$ est $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   - **g.** Achever la construction de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

4 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O', \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{O'O}$.

a. Montrer que l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$ dans ce repère est : $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = -1$.

b. Vérifier l'exactitude du résultat obtenu dans la question 3. f.

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction numérique f sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - 2\ln x$.

1 **a.** Calculer la dérivée f' de f.

b. Étudier le sens de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [3;4]$.

2 Soit g la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{1+8\ln x}$.

Erreur dans l'énoncé : il convient de définir g sur $[3;+\infty[$ et non sur $]3;+\infty[$. En effet, la question 2. b., suppose que $g(3)$ existe.

a. Montrer que les équation $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Remplacer cette question par : montrer que les équation $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur l'intervalle $[3;+\infty[$.

b. On suppose que : $\forall x \in [3;4], \quad g(x) \in [3;4]$ et $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
Montrer que $\forall x \in [3;4], \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|x-\alpha|$.

3 On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Montrer que $\forall n \in [3;4], \quad u_n \in [3;4]$.

Erreur dans l'énoncé : il s'agit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [3;4]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

d. Montrer que la suite (u_n) converge vers le réel α.

e. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 4 — 3 points

Une classe d'un lycée est constituée de 26 garçons et 14 filles. 13 garçons et n filles de cette classe sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues. On choisit au hasard une personne parmi les élèves de cette classe. On note les événements suivants :

G : « la personne choisie est un garçon »
F : « la personne choisie est une fille »
L : « la personne choisie est inscrite dans un centre d'apprentissage de langues »

1 Calculer les probabilités $P(G)$ et $P(F)$.

2 Construire un arbre de probabilités correspondant aux données de l'énoncé, sachant que $P_G(L) = \dfrac{1}{2}$ et $P_F(L) = \dfrac{n}{14}$.

3 Montrer que $P(L) = \dfrac{13+n}{40}$.

4 Déterminer n pour que les événements L et G soient indépendants.

Correction bac 2009 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** L'équation caractéristique de la suite récurrente $(S) : V_{n+2}+V_{n+1}-V_n$ est : $r^2+r-6=0$.
Elle admet deux solutions distinctes : $r=2$ et $r=-3$.
On en déduit que la suite (a_n) de terme générale $a_n=\alpha 2^n$ et (b_n) de terme général $b_n=\beta(-3)^n$ sont les suites géométriques de (S).

Le premier terme de (a_n) et celui de (b_n) étant égal à 1, on a $a_0=\alpha=1$ et $b_0=\beta=1$.
D'où : $a_n=2^n$ et $b_n=(-3)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}U_{n+2}+U_{n+1}-6U_n &= \alpha 2^{n+2}+\beta(-3)^{n+2}+\alpha 2^{n+1}+\beta(-3)^{n+1}-6(\alpha 2^n+\beta(-3)^n)\\ &= \alpha\underbrace{\left(2^{n+2}+2^{n+1}-6.2^n\right)}_{=0}+\beta\underbrace{\left((-3)^{n+2}+(-3)^{n+1}-6(-3)^n\right)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $(U_n)\in S$.

2 **a.** <u>Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$</u>
L'algorithme d'Euclide appliqué à 27 et 8 donne :
$27=8\times 3+3$
$8=3\times 2+2$
$3=2\times 1+1$

En remontant l'algorithme d'Euclide, l'on obtient :
$1=3-2\times 1$
$1=3-(8-3\times 2)=-8+3\times 3$
$1=-8+(27-8\times 3)\times 3=-8\times 10+27\times 3$
Donc $8\times(-10)-27\times(-3)=1$.

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par -11, on obtient :
$8\times(110)-27\times(33)=-11$.
D'où $(110,33)$ est une solution particulière de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$.

<u>Ensemble des solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$</u>

$$\begin{cases}8\alpha-27\beta=-11\\ 8\times 110-27\times 33=-11\end{cases}\iff 8\alpha-27\beta=8\times 110-27\times 33\iff 8(\alpha-100)=27(\beta-33)$$

On en déduit 8 divise $27(\beta-33)$.
Comme 8 est premier avec 27, alors d'après le théorème de Gauss, 8 divise $\beta-33$.
Il existe donc un entier k tel que $\beta-33=8k$. D'où $\beta=33+8k$.
En remplaçant β par $33+8k$ dans l'équation $8\alpha-27\beta=-11$, on obtient $\alpha=110+27k$.

L'ensemble des solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$ est : $\{(110+27k\,;\,33+8k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

b. En remplaçant α par $110+27k$ et β par $33+8k$ dans l'équation $4\alpha+9\beta=17$, on trouve $k=-4$.

c. La suite (U_n) est de terme général $U_n=\alpha 2^n+\beta(-3)^n$.

$$\begin{cases} U_2 = 17 \\ U_3 = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha+9\beta = 17 \\ 8\alpha-27\beta=-11 \end{cases}$$

Or d'après 2.a., α et β sont solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$ s'ils sont de la forme : $\alpha=110+27k$ et $\beta=33+8k$.

Mais d'après 2. b., $\alpha=110+27k$ et $\beta=33+8k$ sont solutions de l'équation $4\alpha+9\beta=17$ si $k=-4$.

D'où $\alpha=110+27\times(-4)=2$ et $\beta=33+8\times(-4)=1$.

On en déduit aussi que pour $U_2=17$ et $U_3=-11$, la forme générale de la suite (U_n) est $U_n=2.2^n+(-3)^n$.

d.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On sait que $-3\equiv 2\,[5]$. On en déduit que $(-3)^n\equiv 2^n\,[5]$.

En ajoutant membre à membre 2.2^n à l'égalité précédente, on a : $2.2^n+(-3)^n\equiv 2.2^n+2^n\,[5]$.

C'est à dire $2.2^n+(-3)^n\equiv 2^n(1+2)\,[5]$.

D'où $U_n\equiv 3.2^n\,[5]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

e.
- si $n=0$, $U_0\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_0 par 5 est 3.
- si $n=1$, $U_1\equiv 6\,[5]\equiv 1\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_1 par 5 est 1.
- si $n=2$, $U_2\equiv 12\,[5]\equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_2 par 5 est 2.
- si $n=3$, $U_3\equiv 24\,[5]\equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_3 par 5 est 4.
- si $n=4$, $U_4\equiv 48\,[5]\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_4 par 5 est 3.

<u>Déduisons les restes suivant les valeurs de n</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Alors n peut s'écrire $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$ ou $n=4k+3$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Comme $2^4\equiv 1\,[5]$, alors $(2^4)^k\equiv 1\,[5]$. On en déduit que :

- si $n=4k$, $U_{4k}\equiv 3.2^{4k}\,[5]\equiv 3\,(2^4)^k\,[5]\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k} par 5 est 3.
- si $n=4k+1$, $U_{4k+1}\equiv 3.2^{4k+1}\,[5]\equiv 3\times 2.2^{4k}\,[5]\equiv 6\,(2^4)^k\,[5]\equiv 6\,[5]\equiv 1\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+1} par 5 est 1.
- si $n=4k+2$, $U_{4k+2}\equiv 3.2^{4k+2}\,[5]\equiv 3\times 4.2^{4k}\,[5]\equiv 12\,(2^4)^k\,[5]\equiv 12\,[5]\equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+2} par 5 est 2.
- si $n=4k+3$, $U_{4k+3}\equiv 3.2^{4k+3}\,[5]\equiv 3\times 8.2^{4k}\,[5]\equiv 24\,(2^4)^k\,[5]\equiv 24\,[5]\equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+3} par 5 est 4.

3 **a.** En remarquant que $W_n=2^{n+1}+(-3)^n=2.2^n+(-3)^n$, on en déduit que la suite (W_n) n'est autre que la suite (U_n). D'après 2.d., $W_n\equiv 3.2^n\,[5]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= W_0 + W_1 + \cdots + W_n \\
&\equiv 3.2^0 + 3.2^1 + \cdots + 3.2^n\,[5] \\
&\equiv 3(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n)\,[5] \\
&\equiv 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \equiv -3(1-2^{n+1})\,[5] \\
&\equiv 2(1-2^{n+1})\,[5] \quad \text{car } -3 \equiv 2\,[5] \\
&\equiv 2 - 4.2^n\,[5]
\end{aligned}$$

b. $1956 = 4 \times 489$.
$S_{1956}` \equiv 2 - 4.2^{1956}\,[5] \equiv 2 - 4.\left(2^4\right)^{489} \equiv 2 - 4 \times 1\,[5] \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$.
Le reste de la division euclidienne de S_{1956} par 5 est 3.

Exercice 2

1 L'équation $z^2 + (\sqrt{3}+i)z + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.
Cherchons un nombre complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.
$x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + 2\sqrt{3}i$.
Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on a : $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \sqrt{3}$.
D'autre part, comme $|u|^2 = |-2+2\sqrt{3}i|$ alors $x^2 + y^2 = 4$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \\ xy = \sqrt{3} & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient $x = -1$ ou $x = 1$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$.
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
D'où $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2$.
On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z' = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(-1+i) \text{ et } z'' = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(-1-i)$$

2 $z' = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(-1+i) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$.

$z'' = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(-1-i) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)$.

Problème

Partie A

I **1**

<u>Construction du point I</u>

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$

$2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

I est le point tel que B soit le milieu du segment $[AI]$.

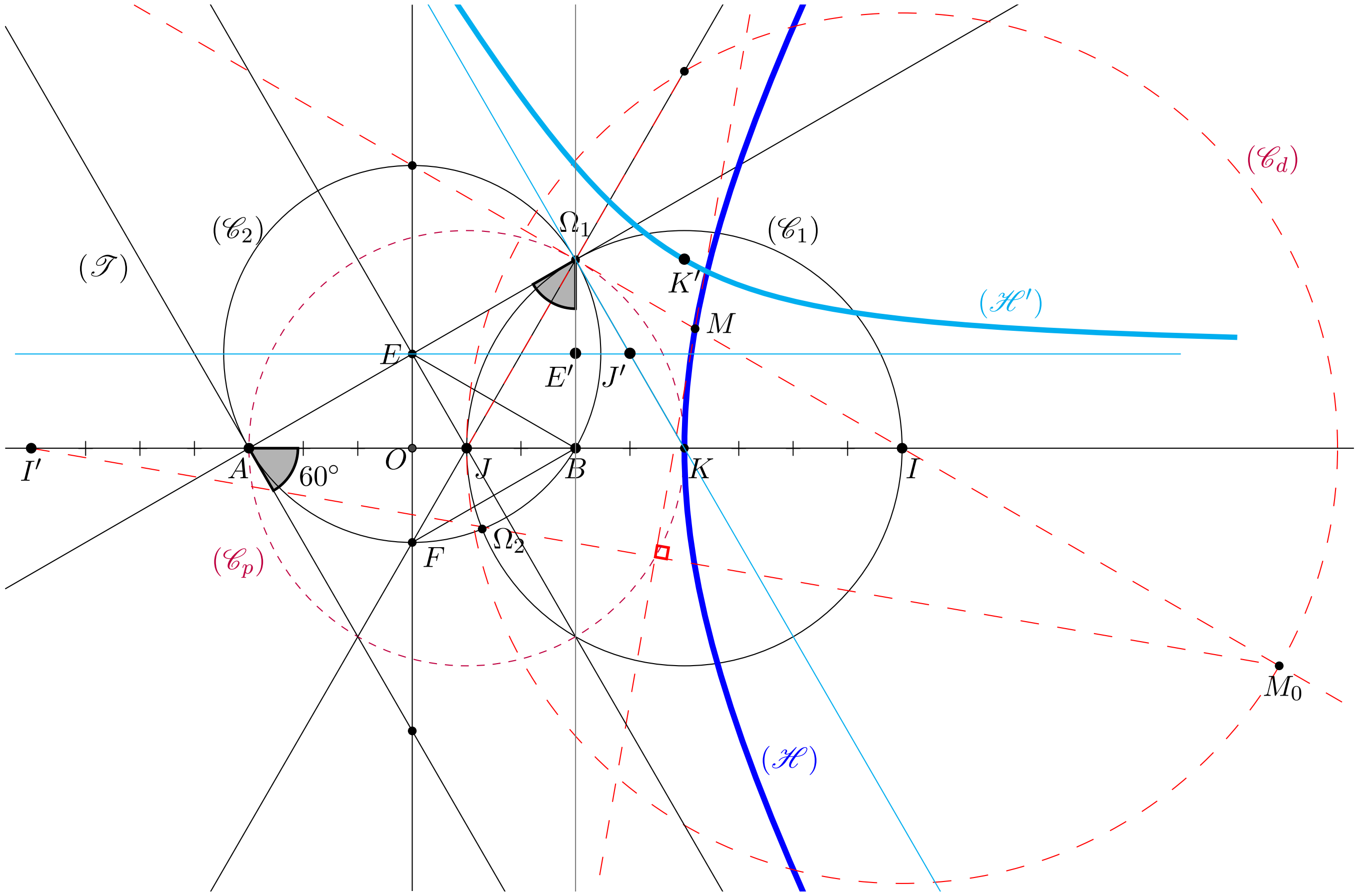
<u>Construction du point J</u>

$2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$

$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$

D'où $\quad \overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

J est le point du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



II

2. Le centre du cercle $(\mathscr{C}_2)$ est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à $(\mathscr{T})$ passant par A.

3.

Comme $J \in (\mathscr{C}_1)$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ alors J est un point du cercle $(\mathscr{C}_1)$ situé sur la corde $[AB] \setminus \{A, B\}$ de $(\mathscr{C}_2)$. Par conséquent, J est un point de l'arc du cercle $(\mathscr{C}_1)$ qui est situé dans le cercle $(\mathscr{C}_2)$ et J est distinct de Ω_1 et Ω_2.

D'autre part, $B \in (\mathscr{C}_2)$ et $\overrightarrow{IB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ (voir∗) alors B est un point du cercle $(\mathscr{C}_2)$ situé sur la corde $[IJ] \setminus \{I, J\}$ de $(\mathscr{C}_1)$. Par conséquent, B est un point de l'arc du cercle $(\mathscr{C}_2)$ qui est situé dans le cercle $(\mathscr{C}_1)$ et B est distinct de Ω_1 et Ω_2.

On en déduit que les points d'intersection Ω_1 et Ω_2 des cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont situés de part et d'autre de la droite $(JB) = (AB)$.

$$(*) \quad 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$$
$$\iff 3\overrightarrow{JI} + 4\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
$$\iff \overrightarrow{IB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$$

III **1**

Soit Ω, le centre de la similitude S. Alors Ω vérifie $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Or $((\mathscr{T}), (AB)) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$. On en déduit que $((\mathscr{T}), (AB)) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})\,[\pi]$.

L'angle formé par la tangente $(\mathscr{T})$ et la corde $[AB]$ a même mesure que l'angle inscrit $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ interceptant cette corde. Donc $\Omega \in (\mathscr{C}_2)$.

De plus, comme $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ est orienté positivement, alors $\Omega = \Omega_1$.

2 Comme $S(A) = B$, alors $A\Omega_1 = 2B\Omega_1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} AB^2 &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2A\Omega_1.B\Omega_1\cos(\frac{\pi}{3}) \\ &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2(2\,B\Omega_1).B\Omega_1 \times \frac{1}{2}. \\ &= A\Omega_1^2 - B\Omega_1^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $AB^2 + B\Omega_1^2 = A\Omega_1^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $AB\Omega_1$ est rectangle en B. Par conséquent, le centre E du cercle circonscrit au triangle $AB\Omega_1$ est également le milieu de l'hypoténuse $[A\Omega_1]$. Donc les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

I

1 **a.**

- $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$.

  En effet, Comme $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \vec{0}$, alors $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Il en résulte que $3\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{BO} = \vec{0}$. D'où $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$

- (BO) où $O \in [EF]$, est la médiane du triangle EFB issue de B.

Donc J est le centre de gravité du triangle EFB.

b. Montrons que $EJ = BK$

J étant le centre de gravité du triangle équilatéral EFB, alors $EJ = JB$. Or $JB = BK$. Donc $EJ = BK$.

Montrons que $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60°$.

$(EJ) \perp (\Omega_1 A)$ et $(BK) \perp (\Omega_1 B)$.

De plus, les angles $\overline{(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})}$ et $\overline{(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B})}$ étant aigus, on en déduit que $\overline{(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})} = \overline{(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B})} = 60°$

c. Comme $EJ = BK$ et $\overrightarrow{EJ} \neq \overrightarrow{BK}$, il existe un rotation R d'angle $\overline{(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})} = 60°$ qui transforme E en B et J en K.

2 Comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par le point Ω_1.

D'autre part, on a $BJ = BK$ et $(JK) \perp (B\Omega_1)$. On en déduit que $(B\Omega_1)$ est la médiatrice de $[JK]$.

Donc les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se coupent en Ω_1, centre de la rotation R.

II **1** Le triangle EFB étant équilatéral de centre de gravité J, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par les points J et F.

De plus, comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par Ω_1.

Donc les points Ω_1, J et F sont alignés.

2 $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 F)} = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 F)}$.

g est la composée de deux symétries axiales $S_{(EF)}$ et $S_{(\Omega_1 F)}$ d'axes sécants en F. C'est donc une rotation de centre F.

Partie C

1 (IJ) est l'axe focal de $(\mathscr{H})$.

Le second foyer de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ est le point I', symétrique de I par rapport à J.

A et K sont les sommets de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

Construction de M

Soit M_0, le point d'intersection de $[\Omega_1 I)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$ associé au foyer I.

M est le point d'intersection de $[I\Omega_1]$ et de la médiatrice de $[I'M_0]$.

En effet,

$$\begin{aligned} MI' - MI &= MM_0 - MI \quad (\text{car } M \text{ est sur la médiatrice de } [I'M_0]) \\ &= IM_0 \\ &= AK \end{aligned}.$$

Ce qui prouve que M est un point de l'hyperbole.

2 $(F\Omega_1)$ asymptote de $(\mathscr{H})$

$(J\Omega_1) \perp (I\Omega_1)$ car le triangle $IJ\Omega_1$ est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre $[IJ]$.

Or $[J\Omega_1]$ est un rayon du cercle principal $(\mathscr{C}_p)$. On en déduit que $(I\Omega_1)$ où I est un foyer de $(\mathscr{H})$ est la tangente à $(\mathscr{C}_p)$ en Ω_1.

Donc $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H})$ et d'après II. 1., $(F\Omega_1)$ est asymptote à $(\mathscr{H})$.

(JE) asymptote de $(\mathscr{H})$

(JE) étant le symétrique de $(F\Omega_1)$ par rapport à l'axe focal (JA) est par conséquent la seconde asymptote de $(\mathscr{H})$.

3 **a.** Comme toute similitude conserve le rapport des distances, alors $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{H}')$ ont même excentricité.

D'où $e = \dfrac{JI}{JK} = 2$.

b. Asymptotes de $(\mathscr{H}')$

- $S(\Omega_1) = \Omega_1$.
  $S(J) = J'$ où J' est le milieu de $[\Omega_1 K]$.
  Comme $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H})$ alors $(J'\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H}')$.
- $S(J) = J'$.
  $S(E) = E'$ où E' est le milieu du segment $[\Omega_1 B]$.
  Comme (EJ) est la seconde asymptote de $(\mathscr{H})$ alors $(E'J')$ est la seconde asymptote de $(\mathscr{H}')$.

Sommets de $(\mathscr{H}')$

- $S(A) = B$.
  Comme A est un sommet de $(\mathscr{H})$, alors B est un sommet de $(\mathscr{H}')$.
- Déterminons le second sommet de $(\mathscr{H}')$.
  $S(J) = J'$.
  Comme J est le centre de $(\mathscr{H})$, alors J' est le centre de $(\mathscr{H}')$.
  On en déduit que le second sommet de $(\mathscr{H}')$ est le point K', symétrique de B par rapport à J'.

Correction bac 2010 - Série C

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.**

$$\begin{aligned} x^2 \equiv -1\,[25] &\iff x^2+1 \equiv 0\,[25] \\ &\iff x^2+1 \text{ est un multiple de } 25 \\ &\iff x^2+1 = 25k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x^2 = -1+25k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc les équations $x^2 \equiv -1\,[25]$ et $x^2 = -1+25k$ où $k \in \mathbb{Z}$, sont équivalentes.

b. Si $k = 2$ alors $x^2 = -1 + 25 \times 2 = 49$. D'où $x = 7$ ou $x = -7$.

2 **a.**

- si $n = 0$ alors $2^0 - 4 \equiv -3\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^0 - 4$ par 5 est 2.
- si $n = 1$ alors $2^1 - 4 \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^1 - 4$ par 5 est 3.
- si $n = 2$ alors $2^2 - 4 \equiv 0\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^2 - 4$ par 5 est 0.
- si $n = 3$ alors $2^3 - 4 \equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^3 - 4$ par 5 est 4.
- si $n = 4$ alors $2^4 - 4 \equiv 12\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^4 - 4$ par 5 est 2.

Déduisons les restes suivant les valeurs de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

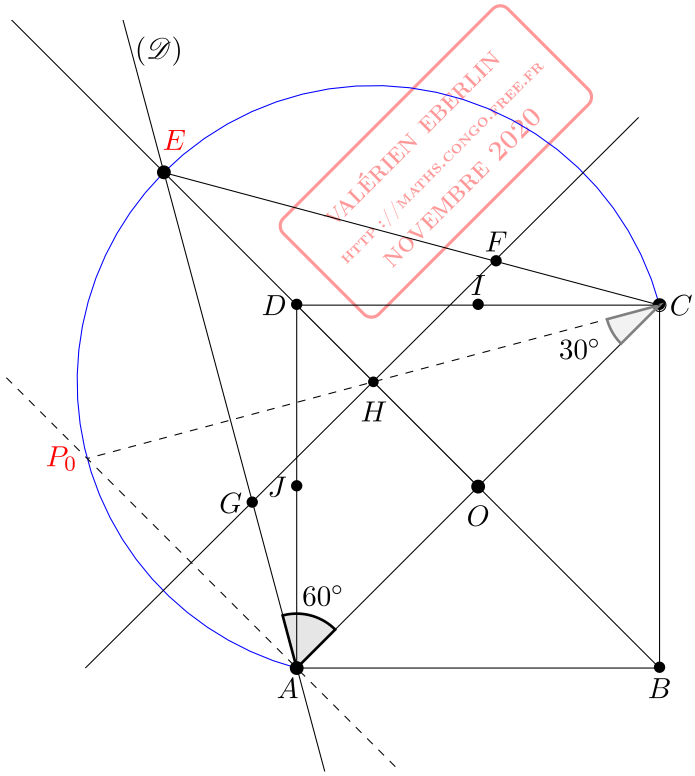
Alors n peut s'écrire $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $2^4 \equiv 1\,[5]$, alors $\left(2^4\right)^k \equiv 1\,[5]$. On en déduit que :

- si $n = 4k$ alors $2^{4k} - 4 \equiv \left(2^4\right)^k - 4\,[5] \equiv -3\,[5] \equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k} - 4$ par 5 est 2.
- si $n = 4k+1$ alors $2^{4k+1} - 4 \equiv \left(2^4\right)^k.2 - 4\,[5] \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+1} - 4$ par 5 est 3.
- si $n = 4k+2$ alors $2^{4k+2} - 4 \equiv \left(2^4\right)^k.2^2 - 4\,[5] \equiv 0\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+2} - 4$ par 5 est 0.
- si $n = 4k+3$ alors $2^{4k+3} - 4 \equiv \left(2^4\right)^k.2^3 - 4\,[5] \equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de $2^{4k+3} - 4$ par 5 est 4.

b. $2010 = 4 \times 502 + 2$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5 est 0. Par conséquent $2^{2010} - 4$ est divisible par 5.

Exercice 2



1 Soit P_0 un point tel que $\overline{(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C})} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Alors $P_0 \in (\Gamma)$.

$$M \in \Gamma \iff \overline{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C})}\,[2\pi]$$

$$\iff M \text{ est un point de l'arc de cercle } \widehat{AP_0C}$$

D'où Γ est l'arc de cercle $\widehat{AP_0C}$.

2 **a.** $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ car E est un point de (Γ).

De plus, $\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ car $\overline{((AC), (\mathscr{D}))} \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ et $E \in (\mathscr{D})$.

On en déduit que le triangle EAC admet deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$. C'est par conséquent un triangle équilatéral.

b. Comme $EA = EC$ et $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{EC}$, alors il existe une rotation r d'angle $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, de centre E, qui transforme A en C.

3 **a.** Dans le triangle EAC,

- $(GF)//\ (AC)$ et $(AG) \cap (CF) = \{E\}$
- D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC}$.

Dans le triangle EOA,

- $(GH)//\ (AO)$ et $(AG) \cap (OH) = \{E\}$
- D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EH}{EO}$.

On en déduit que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{EH}{EO}$.

Or $\dfrac{EH}{EO} = \dfrac{2}{3}$ car H est le centre de gravité du triangle EAC.

D'où $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

b. Les points E, G, A ainsi que E, F, C étant alignés dans le même ordre, on en déduit les égalités vectoriels : $\overrightarrow{EG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EC}$.

Ce qui montre que G et F sont respectivement les transformées de A et C par l'homothétie de centre E et de rapport $\dfrac{2}{3}$.

c. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\dfrac{2}{3}$ qui transforme A en G et C en F.

Posons $S = h \circ r$.

S est une similitude plane directe de centre E, de rapport $\dfrac{2}{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme A en F.

En effet, $S(E) = h \circ r(E) = h(E) = E$ et $S(A) = h \circ r(A) = h(C) = F$.

Problème

Partie A

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$ est : $r^2 + \pi^2 = 0$.
Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = i\pi = 0 + i\pi$ et $r_2 = -i\pi = 0 - i\pi$.
Donc la solution générale est : $y(x) = \mathrm{e}^{0x}(c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)) = c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 g est de la forme $g(x) = c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\pi = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\sin(\pi x)$.

Partie B

3 **a.** La fonction $x \longmapsto 2\sin\pi x$ existe pour tout $x \in [-4; 0]$;

la fonction $x \longmapsto x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln x\right)$ existe pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Donc $E_f = [-4; +\infty[$.

b. <u>Continuité en 0</u>.

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = f(0) = 2\sin(\pi \times 0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} (\frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x) = 0.$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0.

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{2\sin \pi x}{x} = 2\pi \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 2\pi \text{ où l'on a posé } u = \pi x.$$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{1}{2}x - x \ln x\right) = 0.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0.

c. $\forall x \in [-4; -2]$, on a $2\sin \pi(x+2) = 2\sin(\pi x + 2\pi) = 2\sin \pi x$.
La fonction $x \longmapsto 2\sin \pi x$, définie sur $[-4; 0]$, est périodique de période 2.
On peut alors restreindre son étude sur $[-2; 0]$, puis reporter son tracé sur la portion $[-4; -2]$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

D'où l'étude de la fonction f peut être réduite à l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4 **a.** La fonction f est dérivable sur $]-2; 0[\cup]0; +\infty[$.
$\forall x \in]-2; 0[, \quad f'(x) = 2\pi \cos \pi x.$
$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -2x \ln x.$

Signes de f'

Sur $]-2; 0[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos \pi x$.

$$\begin{aligned}
\cos \pi x \geq 0 &\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z} \\
&\iff -\frac{1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{1}{2} + 2k \quad ; k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x \in]-2; -\tfrac{3}{2}] \text{ ou } x \in [-\tfrac{1}{2}; 0[\quad (\text{en prenant } k = 0 \text{ et } k = -1)
\end{aligned}$$

D'où, sur l'intervalle $]-2; 0[$, $f'(x) \geq 0 \iff x \in]-2; -\frac{3}{2}]$ ou $x \in [-\frac{1}{2}; 0[$.

Sur $]0; +\infty[$,
$f'(x) = -2x \ln x \geq 0 \iff x \in]0; 1]$;
$f'(x) = -2x \ln x \leq 0 \iff x \in [1; +\infty[$.

Tableau de variation de f.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

b. Branches infinies

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} x\ln x\left(\frac{1}{2\ln x}-1\right)=-\infty.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Points d'intersection avec l'axe (Ox)

Si $-2\leq x\leq 0$

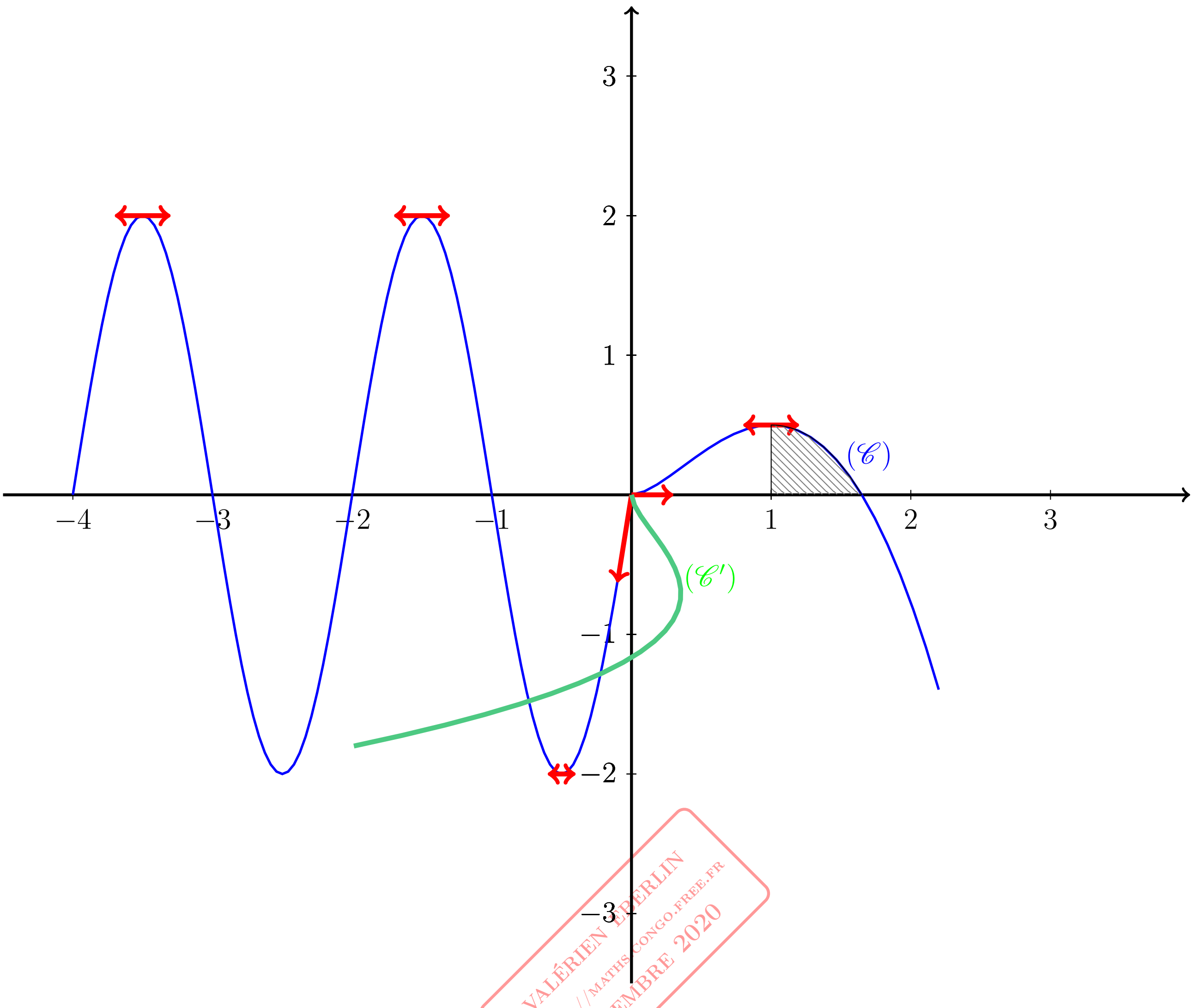
$f(x)=0 \iff \sin\pi x=0 \iff x=-2$ ou $x=-1$ ou $x=0$

Si $x>0$

$$f(x)=0 \iff x^2\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=\sqrt{\mathrm{e}}$$

Sur $[-2;+\infty[$, les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses sont : $(-2,0)$; $(-1,0)$; $(0,0)$ et $(\sqrt{\mathrm{e}},0)$.

.



5 $A_0=\displaystyle\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^2\ln x\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}-\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x^2\ln x\,dx.$

Intégrons par parties $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \, dx.$

D'où $A_0 = \left[\dfrac{5x^3}{18} - \dfrac{x^3}{3} \ln x\right]_1^{\sqrt{e}} = \dfrac{2\,e\sqrt{e} - 5}{18}$ u.a $= \dfrac{4\,e\sqrt{e} - 10}{9}$ cm^2.

6 Voir figure.

7 **a.** Comme toute similitude de rapport k multiplie l'aire de la transformée par k^2, la similitude S multiplie l'aire de la transformée par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

D'où : $A_n = \frac{1}{2}A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0$.

b. $(A_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$S_n = A_0 + \frac{1}{2}A_0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 = \dfrac{A_0 \times (1 - (\frac{1}{2})^{n+1})}{1 - \frac{1}{2}} = 2A_0(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2A_0 = \dfrac{8\,e\sqrt{e} - 20}{9}$ cm^2

Correction bac 2011 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$.

2 $A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2(x)-\sin^2(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$.

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\cos(2x)\end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$A-B=\left[\frac{1}{2}x\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\,dx=\left[\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$$

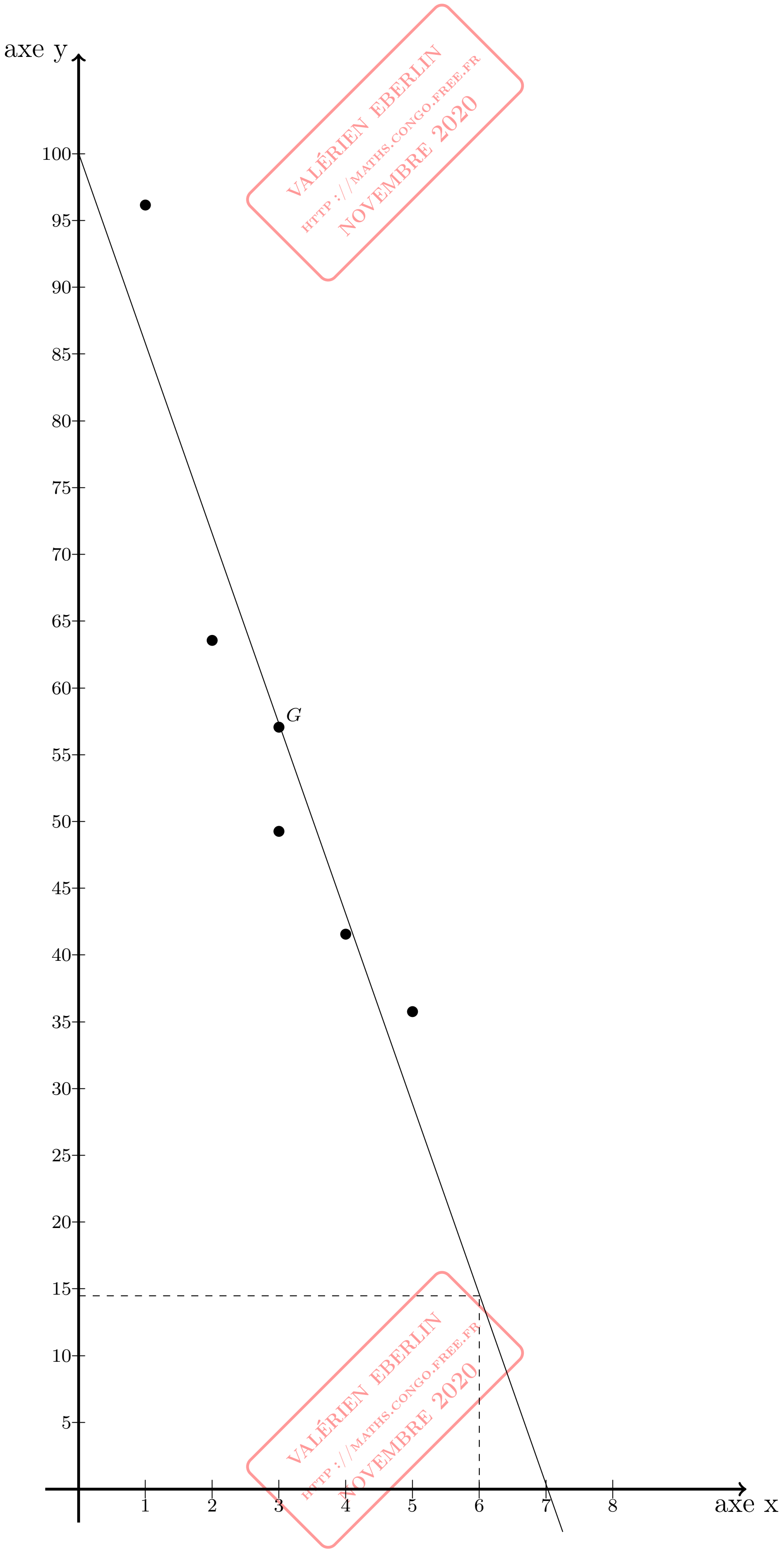
3

$$\begin{cases} A+B=\frac{\pi^2}{8} & (1) \\ A-B=-\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on en déduit que, $A=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$.
En multipliant l'équation (2) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), on en déduit que $B=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

Exercice 2

1



axe y
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
G
1
2
3
4
5
6
7
8
axe x
VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

2 L'équation de la droite de régression linéaire de y en x est donnée par : $y = ax + b$ où $a = \dfrac{\text{Cov}(x, y)}{\text{V}(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

<u>Moyenne</u>

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{96,1+63,5+49,2+41,5+35,7}{5} = 57,2$$

<u>Covariance, variance</u>

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \overline{x}.\overline{y} = \frac{1\times 96,1+\cdots+5\times 35,7}{5} - 3\times 57,2 = -28.56$$

$$\text{V}(x) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} - 3^2 = 2$$

$$a = \frac{-28,56}{2} = -14,28 \quad ; \quad b = 57,2 - (-14,28)\times 3 = 100,04.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire : $y = -14,28\,x + 100,04$

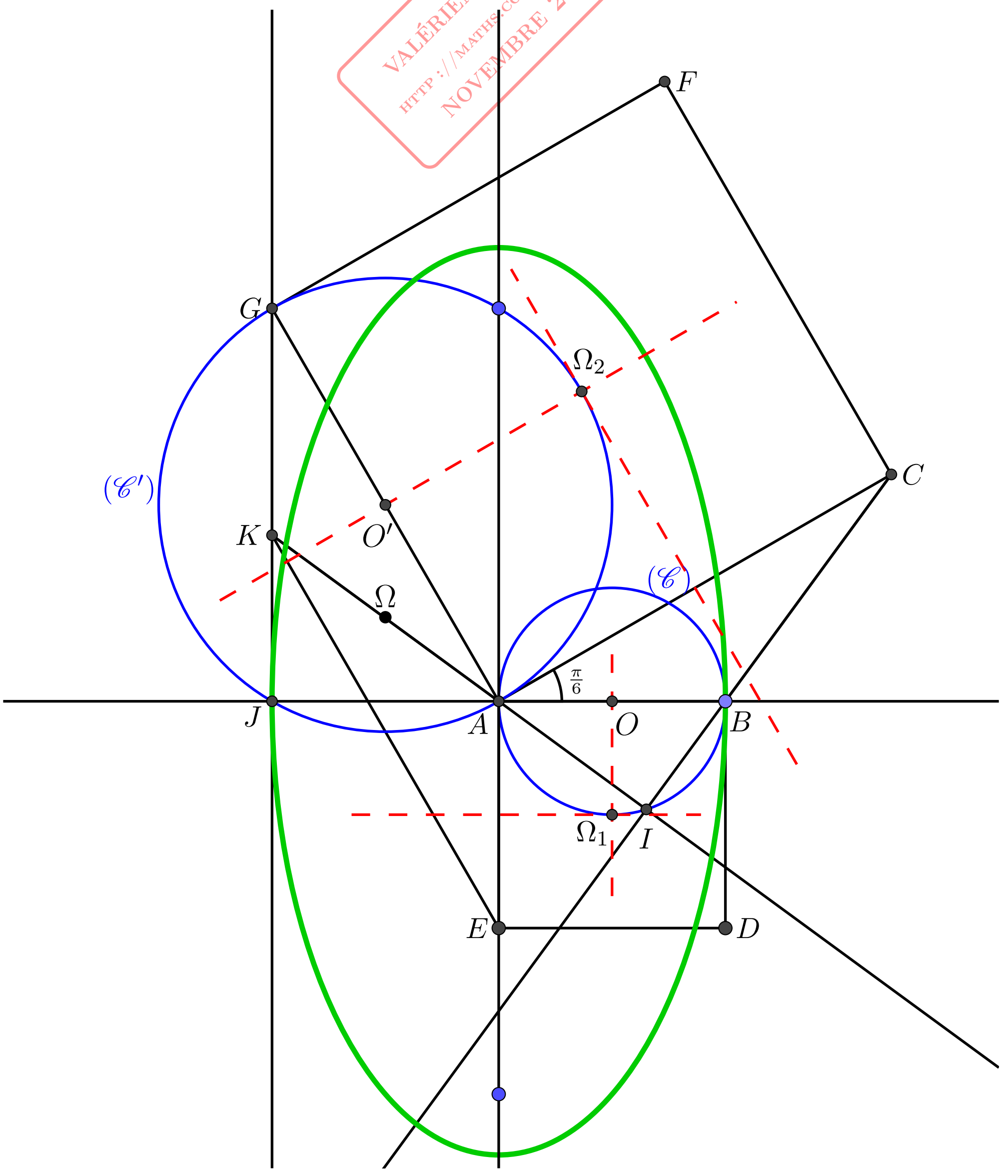
3 Pour $x = 6$, $y = -14.28 \times 6 + 100,04 = 14360.$

Le bénéfice au 6ème mois est estimé à 14 360 francs CFA.

Problème

Partie A

1



2 Les triangles ABC et EAK sont isométriques

- $AB = EA$.
- $AC = EK$. En effet, comme $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$, alors $GKEA$ est un parallélogramme. On en déduit que $EK = AG$. Or $AG = AC$. D'où $AC = EK$.
- $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})}\ [2\pi]$
  En effet, $(AB) \perp (EA)$ et $(AC) \perp (EK)$.
  On en déduit que $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})}$ sont deux angles (aigus) à côtés perpendiculaires. D'où : $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})}\ [2\pi]$.

Donc les triangles ABC et EAK sont isométriques puisqu'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur.

Existence de R_1 telle que $R_1(ABC) = EAK$

Comme $AB = EA$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EA}$, alors il existe une rotation R_1 d'angle $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, qui transforme A en E et B en A.

Reste à montrer que $R_1(C) = K$.

Soit K' le point tel que $R_1(ABC) = EAK'$.

On a $AC = EK'$. Or $AC = EK$. On en déduit que $EK = EK'$.

On a également $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK'})}\,[2\pi]$. Or $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})}\,[2\pi]$. On en déduit que $\overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK'})} \equiv \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK})}\,[2\pi]$.

Donc $K = K'$ et par conséquent $R_1(C) = K$.

Construction de Ω_1, centre de la rotation R_1

Ω_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AE]$ et $[BA]$.

3 Soit Ω, le centre du parallélogramme $GKEA$

La rotation R_0, de centre Ω et d'angle π transforme le triangle EAK en le triangle GKA.

D'où $R_2 = R_0 \circ R_1$ transforme le triangle ABC en le triangle GKA.

Angle de R_2

Comme $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq 0\,[2\pi]$ alors $R_2 = R_0 \circ R_1$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Construction de Ω_2

$R_2(A) = G$.

$R_2(C) = A$.

Ω_2 est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AG]$ et $[CA]$ c'est à dire Ω_2 est le centre du carré $ACFG$.

4 **a.** $f = R_1 \circ R_2$ est la composée de deux rotations, de centres distincts, dont la somme des angles $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0\,[2\pi]$. C'est donc une translation.

b. $f(C) = R_1 \circ R_2(C) = R_1(A) = E$.

$\overrightarrow{CE}$ est le vecteur de translation de f.

5
- $\overline{(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. En effet, comme $R_1(B) = A$ et $R_1(C) = K$, alors $\overline{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

  Or $\overline{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK})} = \overline{(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})}$. Donc $\overline{(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{\Omega_1 B}, \overrightarrow{\Omega_1 A})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ car Ω_1 est le centre du carré $ABDE$.

On en déduit que les triangles IAB et Ω_1AB sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AB]$.

Donc les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur le même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, milieu de $[AB]$.

6
- $\overline{(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JG})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- $\overline{(\overrightarrow{\Omega_2 G}, \overrightarrow{\Omega_2 A})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On en déduit que les triangles JAG et Ω_2AG sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AG]$.

Donc les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur le même cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O', milieu de $[AG]$.

Partie B

7 $S(A) = A$ et $S(O) = O'$.

S est la similitude de centre A, de rapport $\dfrac{AO'}{AO} = 2$ et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})} \equiv \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] = \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

8 L'expression complexe de S est donnée par $z' - z_A = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$ avec $z_A = 0$ (origine du repère).
D'où $z' = (-1 + i\sqrt{3})z$.

9 Comme $z' = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\,z$, on en déduit que $z = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\,z' = \left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z'$.

En remplaçant z par $x + iy$ et z' par $x' + iy'$ dans l'expression $z = \left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z'$, on obtient après identification des parties réelles et des parties imaginaires :
$x = \dfrac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}\,y')$ et $y = -\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}\,x' + y')$

Partie C

10 $4x^2 + y^2 = 4 \iff \dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$
$(\mathscr{E})$ est une ellipse :
- de centre $A(0,0)$;
- de sommets : $B(1,0)$; $J(-1,0)$; $(0,2)$; $(0,-2)$
- de demi-distance focale $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ et de foyers : $F(0,\sqrt{3})$ et $F'(0,-\sqrt{3})$.

11 En remplaçant x par $\dfrac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}\,y')$ et y par $-\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}\,x' + y')$ dans l'équation $4x^2 + y^2 = 4$, on a : $7x'^2 - 6\sqrt{3}\,x'y' + 13y'^2 = 64$.
D'où une équation de $(\mathscr{E}')$: $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 64$.

Correction bac 2012 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 Soit $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$, une solution de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(ib)^4 - \sqrt{2}(ib)^3 - 4\sqrt{2}(ib) - 16 = 0 &\iff b^4 - 16 + i\sqrt{2}b(b^2-4) = 0\\ &\iff b^4 - 16 = 0 \text{ et } b(b^2-4) = 0\\ &\iff b = 2 \text{ ou } b = -2\end{aligned}$$

Les solutions imaginaires pures sont $z_0 = 2i$ et $z_1 = -2i$.

L'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 &= (Z-2i)(Z+2i)(Z^2+cZ+d)\\ &= (Z^2+4)(Z^2+cZ+d)\end{aligned}$$

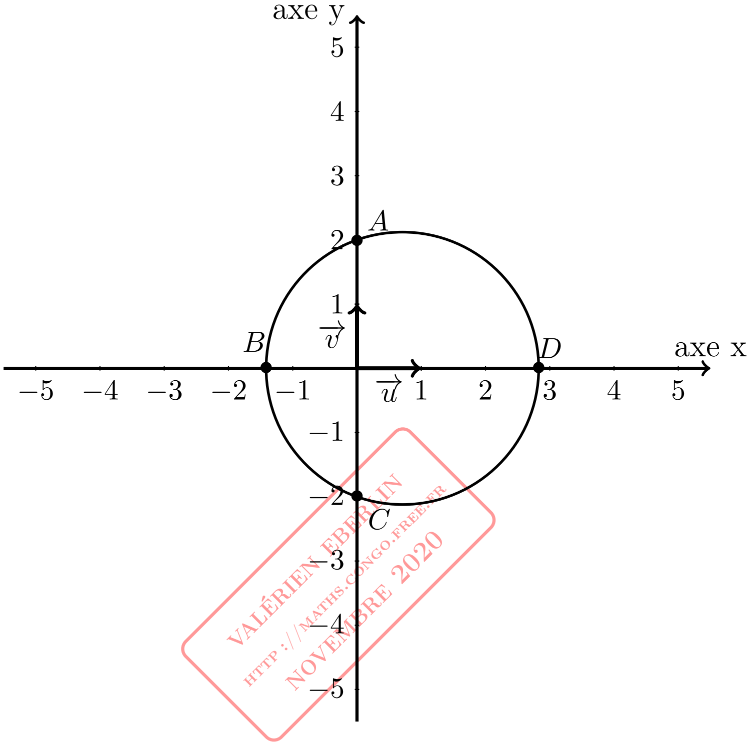
Le terme de degré 0 du second membre est $4d$. On en déduit que $4d = -16$. D'où $d = -4$.
Le terme de degré 1 du second membre est $4c$. On en déduit que $4c = -4\sqrt{2}$. D'où $c = -\sqrt{2}$.

Il vient que : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = (Z^2+4)(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4)$.

L'équation $Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(-4) = 18$ admet deux racines $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

Donc les solutions de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sont : $z_0 = 2i$, $z_1 = -2i$, $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

2 **a.**



b.

Les points A, B, C et D sont cocycliques $\iff \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv \overline{(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})}\ [\pi]$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = \frac{-4i}{-\sqrt{2} - 2i} \div \frac{-2i - 2\sqrt{2}}{-3\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{6} \in \mathbb{R}$$

Donc les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$.

Le cercle $(\mathscr{C})$ a pour centre, le point d'affixe $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour rayon $\dfrac{1}{2}|z_D - z_B| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

1 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 1$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \longmapsto x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$.

De plus : $\forall\, x \in [0; 1],\quad x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$.

Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

$I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}.\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Si l'on choisit $\begin{cases} u = x^{n-1} \\ v' = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u' = (n-1)x^{n-2} \\ v = -\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$I_n = \left[-x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 + (n-1)\displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$.

D'où : $I_n = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ pour tout entier n tel que $n \geq 3$.

4 <u>Décroissance de la suite (I_n)</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \longmapsto x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$.

De plus, $\forall\, x \in [0\,;\,1],\ x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$.

Donc $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (I_n) est décroissante.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

<u>Convergence de la suite (I_n)</u>

La suite (I_n) est décroissante d'après 4..
De plus, (I_n) est minorée par 0 d'après 2..
Donc la suite (I_n) converge vers une limite l.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall\, x \in [0;1],\quad -\frac{x^2}{2} \leq 0.$

Par croissance de la fonction exponentielle, $0 < \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathrm{e}^0 = 1.$

On en déduit que : $0 \leq x^n\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq x^n.$

Par passage à l'intégrale, on a : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

D'où $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

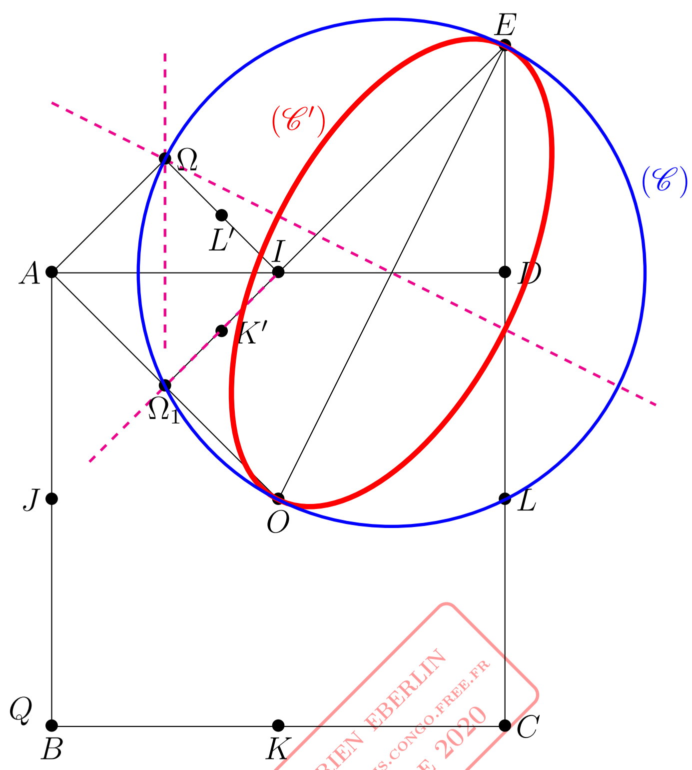
<u>Calcul de l</u>

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}.$

Par passage à la limite, on a $\quad 0 \leq \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

On en déduit que $\quad l = 0.$

Problème



1 $IE^2 = ID^2 + DE^2 = AI^2 + IO^2 = AO^2$. Donc $IE = AO$.

2 Comme $IE = AO$ et $\overrightarrow{IE} \neq \overrightarrow{AO}$ alors il existe une unique rotation r, d'angle $\overline{(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})}$ qui transforme I en A et E en O.

Cet angle vaut $\overline{(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})} = \overline{(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3 Ω le point d'intersection de médiatrices des segments $[IA]$ et $[EO]$.

4 Comme $r(E) = O$, alors $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'autre part, $(\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'où, $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv (\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E})\ [2\pi]$. Les points Ω, E, O, Ω_1 sont cocycliques.

5
- <u>Le triangle ΩAI est rectangle isocèle</u>

  En effet, comme $r(I) = A$, alors $\Omega A = \Omega I$ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'où le triangle ΩAI est rectangle isocèle en Ω.

- <u>Le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle</u>

  - Dans le triangle AOD,
    $\Omega_1 \in [AO]$; $I \in [AD]$.
    De plus, $(\Omega_1 I)//(OD)$.
    D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{A\Omega_1}{AO} = \dfrac{\Omega_1 I}{OD}$.
    On en déduit que $\dfrac{A\Omega_1}{\Omega_1 I} = \dfrac{AO}{OD} = 1$ d'où $A\Omega_1 = \Omega_1 I$.
  - De plus, $(\overrightarrow{\Omega_1 I}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) = (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

  Donc le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle en Ω_1.

Les triangles ΩAI et $\Omega_1 AI$ sont alors rectangles isocèles, d'hypoténuse commune $[AI]$. Donc le quadrilatère $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.

6 $S(ABCD) = A\Omega_1 I\Omega$.

La similitude S vérifie en particulier : $S(A) = A$ et $S(B) = \Omega_1$.

D'où, S est la similitude de centre A, d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega_1}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et de rapport :

$$\frac{A\Omega_1}{AB} = \frac{\frac{1}{4}.AC}{AB} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

7
- $S(B) = \Omega_1$ et $S(C) = I$.
  Comme K est le milieu du segment $[BC]$, alors $S(K) = K'$ est le milieu du segment $[\Omega_1 I]$.
- $S(C) = I$ et $S(D) = \Omega$.
  Comme L est le milieu du segment $[CD]$, alors $S(L) = L'$ est le milieu du segment $[I\Omega]$.

8 $\overline{S}(Q) = Q$.

$\overline{S}$ est une similitude plane indirecte de centre Q, d'axe (OD) et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

9 **a.**

$\overline{S}(C) = J$.

$\overline{S}(C) = h_{(Q,\frac{1}{2})} \circ S_{OD}(C) = h_{(Q,\frac{1}{2})}(A)$.

On en déduit que $h_{(Q,\frac{1}{2})}(A) = J$. D'où $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.

b.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} &\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\
&\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} \\
&\iff \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0} \\
&\iff Q = B
\end{aligned}$$

10 **a.** f est est une affinité orthogonale d'axe (OE), de rapport $\frac{1}{2}$.

b. Voir figure.

c. $(\mathscr{C}')$ est un ellipse.

Correction bac 2013 - Série C

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1 En remplaçant z par -1 dans l'équation (E), on vérifie que :
$(-1)^3 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-1)^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(-1) + 1 = 0.$

2 Soit z_0, une solution de (E). Le nombre z_0 est nécessaire non nul puisque 0 n'est pas une solution de (E).

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right) + 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_0 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_0^2 + z_0^3}{z_0^3} = \frac{0}{z_0^3} = 0.$$

3 L'équation (E') : $z^2 - \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + 1$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Cherchons un nombre complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Alors, $x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + \dfrac{3}{2}i$.

Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \dfrac{3}{4}$.

D'autre part, comme $|u|^2 = |-2 + \dfrac{3}{2}i|$ alors $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2} & (2) \\ xy = \dfrac{3}{4} & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\dfrac{3}{2}$ ou $y = \dfrac{3}{2}$.
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
D'où $\Delta = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)^2$.

On en déduit que les racines de l'équation (E') sont : $z_0' = 1 + i$ et $z_0'' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

4 En remarquant que
$(z+1)\left(z^2 - \left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z + 1\right) = z^3 - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z^2 - \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z + 1$, on en déduit que les solutions de l'équation (E) sont : $\left\{-1\,,\,1+i\,,\,\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right\}$.

Exercice 2

1

Y \ X	-2	-1	0
-1	3	2	1
0	0	3	0
2	2	2	1

2

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum\limits_i n_{i\bullet} = \sum\limits_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

Série marginale de X

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	5	7	2

Série marginale de Y

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	3	5

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}\, x_i = \frac{5\times(-2)+7\times(-1)+2\times 0}{14} = -\frac{17}{14}$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\, y_j = \frac{6\times(-1)+3\times 0+5\times 2}{14} = \frac{2}{7}$$

D'où le point moyen $G\left(-\frac{17}{14}\,;\,\frac{2}{7}\right)$.

3 $$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet} x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{14}\left[5\times(-2)^2+7\times(-1)^2+2\times 0^2\right] - \left(-\frac{17}{14}\right)^2 = \frac{89}{196}.$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\, y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{14}\left[6\times(-1)^2+3\times 0^2+5\times 2^2\right] - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{87}{49}.$$

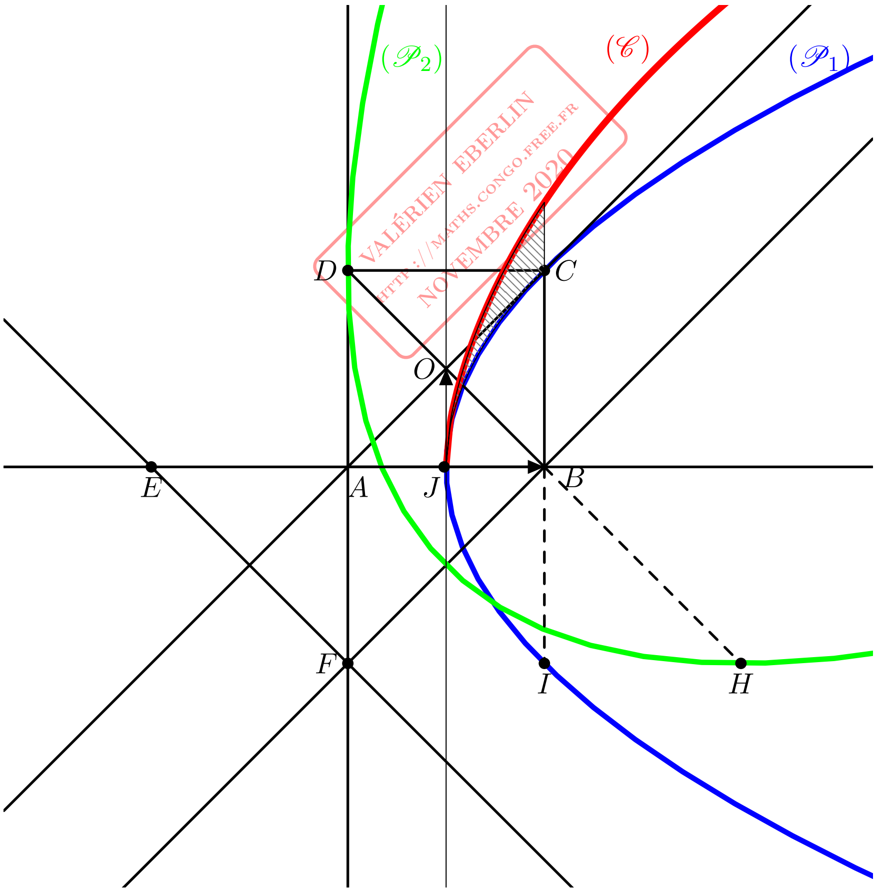
4

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y}\\ &= \frac{1}{14}(3\times 2+2\times 1+2\times(-4)+2\times(-2)) - \left(-\frac{17}{14}\right)\times\frac{2}{7}.\\ &= \frac{3}{49}\end{aligned}$$

5 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = 0,068.$

Problème



1 $C \in \mathscr{P}_1$ et D est le projeté orthogonal de C sur la directrice (AD).
Et (AC) qui est la tangente en C à $(\mathscr{P}_1)$ est également la médiatrice de $[BD]$.
Donc B est le foyer de la parabole.

2 E est le symétrique du foyer B par rapport à la tangente (AD) à $(\mathscr{P}_2)$.
On en déduit que E est un point de la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.
Or E est également le projeté orthogonal de $D \in (\mathscr{P}_2)$ sur (EF).
Donc (EF) est la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.

3 B est le foyer de $(\mathscr{P}_2)$.
(EF) est la directrice de $(\mathscr{P}_2)$.
On en déduit que (BF) qui est la perpendiculaire à (EF) passant par B est son axe focal.
C'est par conséquent son axe de symétrie.
D'où H est le symétrique de D par rapport à (BF).

4 $[DH]$ est un segment passant par le foyer B et dont les extrémités appartiennent à $(\mathscr{P}_2)$.
C'est une corde focale de $(\mathscr{P}_2)$.

5 B est le foyer de $(\mathscr{P}_1)$.
(AD) est la directrice de $(\mathscr{P}_1)$.
On en déduit que (BE) qui est la perpendiculaire à (AD) passant par B est son axe focal.
C'est par conséquent son axe de symétrie.
Comme $C \in (\mathscr{P}_1)$, alors I symétrique de C par rapport à (BE), appartient à $(\mathscr{P}_1)$.

6 Voir figure.

7 $\theta = \overline{(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA})} \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

8 $k = \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9 $[CI]$ corde focale de $(\mathscr{P}_1)$ est perpendiculaire à son axe focal.
$[DH]$ corde focale de $(\mathscr{P}_2)$ est perpendiculaire à son axe focal.
On en déduit que $S([DH]) = [CI]$.
Or la similitude conserve les milieux. Comme B est le milieu de $[DH]$, alors $S(B)$ est le milieu de $[CI]$.
D'où $S(B) = B$.
Donc B est le centre de la similitude S.

10 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x+1}$.

Signe de f'
$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) > 0$.

Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln(x+1)}{x}\right) = 0.$

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction $\overrightarrow{JB}$.

12 Voir figure (en rouge).

13 p étant la distance du foyer à la directrice, on a : $p = AB = 2$.
L'équation cartésienne de la parabole $(\mathscr{P}_1)$ est alors $y^2 = 2px = 4x$.
On en déduit que $(\mathscr{P}_1)$ est la réunion de deux courbes symétriques par rapport à (JB) :

- la courbe d'équation $y_1(x) = 2\sqrt{x}$
- la courbe d'équation $y_2(x) = -2\sqrt{x}$.

D'où l'aire de la portion :
$$\int_0^1 (f(x) - y_1(x))\, dx = \int_0^1 ((2\sqrt{x} + \ln(x+1) - 2\sqrt{x})\, dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

Correction bac 2014 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 L'équation (E) : $Z^2 - (2ie^{i\theta}\cos\theta)Z - \mathrm{e}^{i2\theta} = 0$ admet pour discriminant réduit :
$\Delta' = (ie^{i\theta}\cos\theta)^2 - 1 \times (-e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(-\cos^2\theta + 1) = (e^{i\theta}\sin\theta)^2$.
On en déduit que les racines de l'équation (E) sont alors :

$$Z_1 = \frac{ie^{i\theta}\cos\theta - e^{i\theta}\sin\theta}{1} = e^{i\theta}\, i\,(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}.$$

$$Z_2 = \frac{ie^{i\theta}\cos\theta + e^{i\theta}\sin\theta}{1} = e^{i\theta}\, i\,(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2 **a.** $arg\left(\dfrac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right) = arg\left(\dfrac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = arg(e^{i2\theta}) \equiv 2\theta\,[2\pi]$

b. Comme $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv arg\left(\dfrac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right)\,[2\pi]$, alors $2\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. D'où $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[\pi]$.

L'ensemble des valeurs de θ est $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

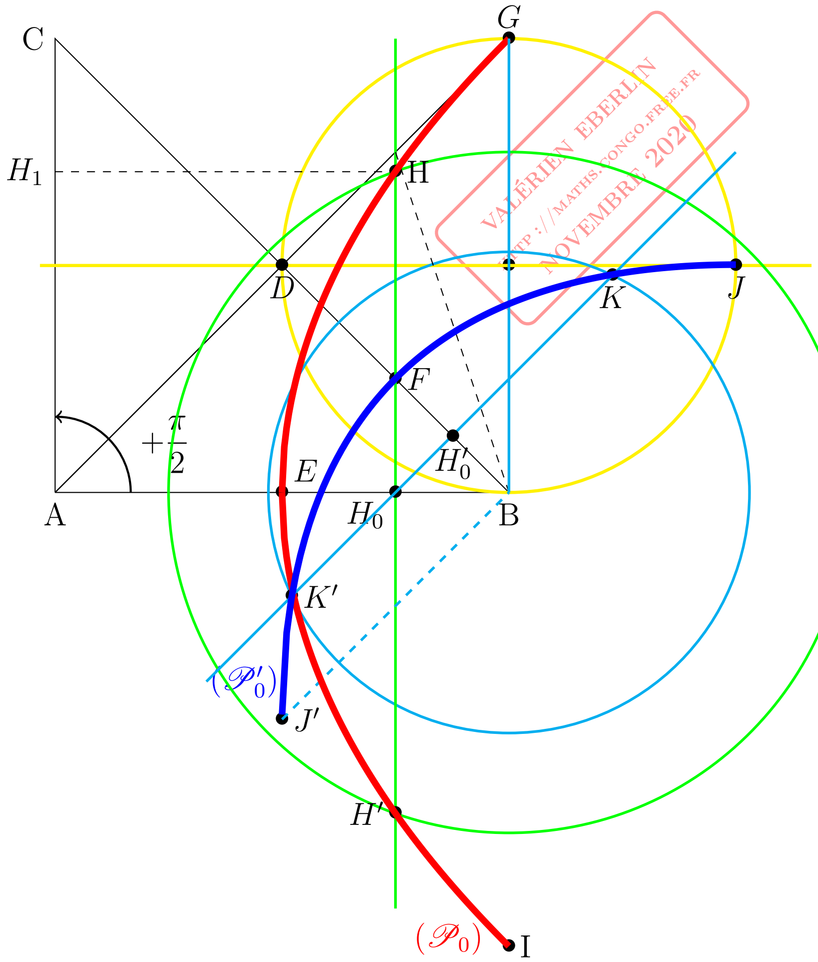
c.

$$\begin{aligned} Z_A + Z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(1 + \mathrm{e}^{i2\theta}\right) &= e^{i\frac{\pi}{2}}\,(1 + \cos 2\theta + i\,\sin 2\theta) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta + i\,2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right) \quad . \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{e}^{i\theta} \\ &= 2\cos\theta\, e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \end{aligned}$$

On a : $|Z_A + Z_B| = |2\cos\theta| = 2\cos\theta$ car $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $2\cos\theta\, e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ est la forme exponentielle de $Z_A + Z_B$.
Donc la forme exponentielle de $\overline{Z_A + Z_B}$ est $2\cos\theta\, e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

Exercice 2

1



2 **a.** On appelle paramètre p d'une parabole, la distance du foyer de cette parabole à sa directrice.

b. AB étant la distance du foyer B à la directrice (AC), alors $\alpha = AB = 6$ cm.

3 **a.**

- B est le foyer de $(\mathscr{P})$;
- $G \in (\mathscr{P})$ car C est le projeté orthogonal de G sur la directrice (AC) et $GB = GC$.
- De plus, (AG) est la médiatrice de $[BC]$.

Donc (AG) est la tangente à $(\mathscr{P})$ en G.

b. Notons H_1 le projeté orthogonal de H sur la directrice (AC) et H_0 le milieu de $[EB]$.
On a : $HH_1 = H_0A$. Or $HH_1 = HB$ car $H \in (\mathscr{P})$. Donc $HB = H_0A$.
On en déduit que H est l'un des points d'intersection de la médiatrice du segment $[EB]$ et du cercle de centre B de rayon H_0A (voir la construction en vert ci-dessous).

c. $E \in (\mathscr{P})$. Les points G et H ainsi que leurs symétriques I et H' par rapport à l'axe focal (AB) sont des points de $(\mathscr{P})$. À partir de ces 5 points, on obtient une allure de l'arc $(\mathscr{P}_0)$.

4 S est la similitude de centre B, de rapport $K = \dfrac{BA}{BD} = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$ et d'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

5 Comme $S(B) = B$ et $S(J) = G$, alors $BG = \sqrt{2}\,BJ$ et $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG}) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
On en déduit que le triangle BJG est rectangle isocèle en J.
J est donc le point d'intersection du cercle de diamètre $[BG]$ et de la médiatrice de $[BG]$ tel que l'angle $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG})$ soit orienté positivement (voir construction en jaune).

6 Pour construire l'arc $(\mathscr{P}'_0)$, on applique le même procédé que celui utilisé pour construire l'arc $(\mathscr{P}_0)$ (voir 3.b.).
Soit H'_0, le milieu de $[BF]$. Les points d'intersections K et K' du cercle de centre B de rayon $[H'_0D]$ et de la médiatrice de $[BF]$ appartiennent à $(\mathscr{P}')$.
À l'aide des cinq points, K, K', F, J et J' où J' est le symétrique de J par rapport à l'axe focal (BD), on construit une allure de l'arc $(\mathscr{P}'_0)$.

7 Toute similitude de rapport k multiplie l'aire de sa transformée par k^2.
Comme S est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et que $S((\mathscr{E}'_0)) = (\mathscr{E}_0)$, alors $A_0 = (\sqrt{2})^2 A'_0 = 2A'_0$

8 $S \circ S \circ S \circ S$ est la similitude de centre B, de rapport $(\sqrt{2})^4 = 4$.
D'où $A = 4^2 A'_0 = 16 \times \dfrac{1}{2} A_0 = 8A_0$

Exercice 3

1 La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'où $E_{f_n} = \mathbb{R}$

2 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'_n(x) = (-\,\mathrm{e}^{-x})x^{n+1} + e^{-x}(n+1)x^n = (-x+n+1)\,\mathrm{e}^{-x}\, x^n$
L'entier n étant impair, x^n est de même signe que x. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$n+1$		$+\infty$
$-x+n+1$			$+$		0	$-$	
e^{-x}				$+$			
x^n		$-$	0		$+$		
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $n+1$ étant pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{n+1} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} = 0$.

c.

x	$-\infty$		0		$n+1$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$	$\searrow$	0

3 **a.**

Si l'on choisit $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x^{n+2} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = (n+2)x^{n+1} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$I_{n+1,p} = \int_0^p \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+2} dx = \Big[-\,\mathrm{e}^{-x}\, x^{n+2}\Big]_0^p + (n+2)\int_0^p \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} dx = -\,\mathrm{e}^{-p}\, p^{n+2} + (n+2) I_{n,p}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{p\to+\infty} I_{n+1,p} = \underbrace{\lim_{p\to+\infty} -\,\mathrm{e}^{-p}\, p^{n+2}}_{=0} + \lim_{p\to+\infty} (n+2) I_{n,p} = (n+2) \lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$$

D'où $J_{n+1} = (n+2)J_n$.

b. $J_n = (n+1)J_{n-1} = (n+1)\times nJ_{n-2} = \cdots = (n+1)\times n\times\cdots\times 2\times J_0 = (n+1)!\, J_0$

Exercice 4

1 Pour tous nombres n et p de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, X est la variable aléatoire qui à tout tirage (n, p) où $n \neq p$, associe $\mid n - p \mid$.

jeton n° \ jeton n°	1	2	3	4
1		1	2	3
2	1		1	2
3	2	1		1
4	3	2	1	

<u>Loi de probabilité de X</u>

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

2 $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, p(X = x_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \, p(X = x_i) - \big(E(X)\big)^2 = 1 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times \dfrac{1}{3} + 9 \times \dfrac{1}{6} - \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$

$\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Correction bac 2015 - Série C

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1 **a.** Les nombres 21 et 17 étant premiers entre eux, PGCD $(21; 17) = 1$.
D'après le théorème de Bezout, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $21x_0 + 17y_0 = 1$.
En multipliant membre à membre l'égalité précédente par 4, on a : $21.(4x_0) - 17.(-4y_0) = 4$
On en déduit que $(4x_0, -4y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est alors solution de l'équation (E).
Donc l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. On a :

$$\begin{aligned} 21x - 17y = 4 &\iff 21x - 4 = 17y \quad \text{avec } y \text{ entier} \\ &\iff 21x - 4 \quad \text{est un multiple de } 17 \\ &\iff 21x - 4 \equiv 0\,[17] \\ &\iff 21x \equiv 4\,[17] \end{aligned}$$

Les équation (E) et (E') sont équivalentes.

2 **a.** L'algorithme d'Euclide appliqué à 21 et 17 donne :
$21 = 17 \times 1 + 4$
$17 = 4 \times 4 + 1$
En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient :
$1 = 17 - 4 \times 4$
$1 = 17 - (21 - 17 \times 1) \times 4$
$1 = 17 - 21 \times 4 + 17 \times 4$
$1 = 17 \times 5 - 21 \times 4$

On en déduit que $21 \times (-4) = 1 + 17 \times (-5)$ et par conséquent : $21 \times (-4) \equiv 1\,[17]$.
Donc l'inverse de 21 modulo 17 est -4.

b. Comme $21 \times (-4) \equiv 1\,[17]$, on en déduit que $21 \times (-16) \equiv 4\,[17]$. Donc -16 est une solution particulière de l'équation (E').

Soit x une solution de l'équation (E'),

$$\begin{cases} 21x \equiv 4\,[17] \\ 21 \times (-16) \equiv 4\,[17] \end{cases} \iff 21x \equiv 21 \times (-16)\,[17] \iff 21(x + 16) \equiv 0\,[17] .$$

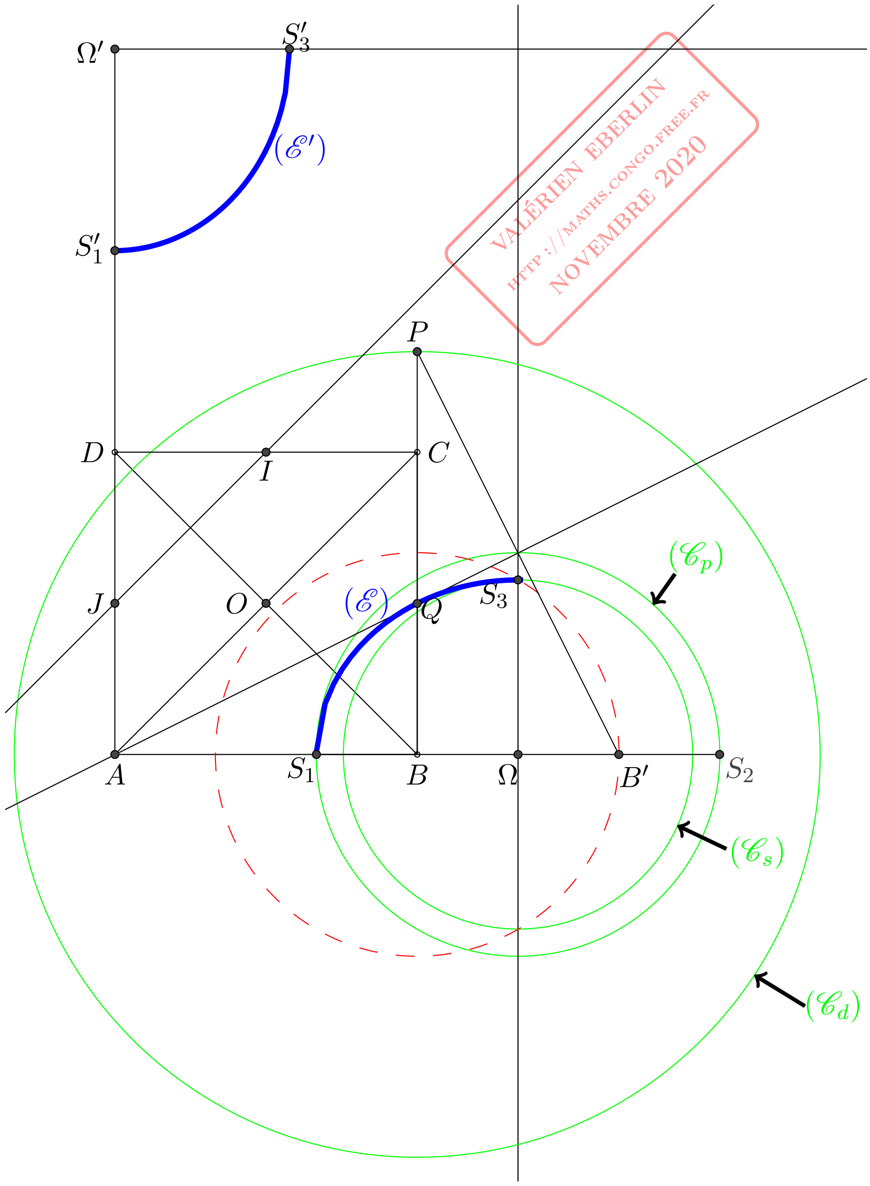
$$\iff 17 \text{ divise } 21(x + 16)$$

Comme 17 est premier avec 21, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $x + 16$. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 16 = 17k$.
D'où $x = -16 + 17k = 1 + 17(k - 1) = 1 + 17k'$.
Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{1 + 17k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3 En remplaçant x par $1+17k$ dans l'équation (E) : $21x - 17y = 4$, on obtient : $y = 1 + 21k$.
Les solutions de l'équation (E) sont l'ensemble : $\{(1 + 17k\,;\,1 + 21k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1



2 L'axe focal est la droite perpendiculaire à la directrice (AD) passant par le foyer B. C'est par conséquent la droite (AB).

3 **a.** Les points S_1 et S_2 à déterminer sont les sommets de l'ellipse.

Soit S un sommet de l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'excentricité $\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{SB}{SA} = \dfrac{1}{2} \iff 4SB^2 - SA^2 = 0 \iff (2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}).(2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}) = 0.$

Comme les points A, B et S sont alignés, alors $2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$ ou $2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$.

<u>Déterminons S tel que $2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$</u>

$2\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} \iff 2\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{BS} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}.$

Le premier sommet S_1 de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie $\overrightarrow{BS_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

<u>Déterminons S tel que $2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$</u>

$2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \iff 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{BA}$.
Le second sommet S_2 de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$.

b. Voir figure.
À partir des sommets S_1 et S_2, on construit le centre Ω de l'ellipse, milieu de $[S_1S_2]$ et on construit le second foyer B', symétrique de B par rapport à Ω.

4 Le cercle principal $(\mathscr{C}_p)$ de $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre Ω et de rayon, le demi-grand axe ΩS_1.

5 Soit S_3 le point d'intersection de l'axe non focal et du cercle de centre B et de rayon, le demi-grand axe ΩS_1.
S_3 vérifie : $\Omega S_1^2 = BS_3^2 = B\Omega^2 + \Omega S_3^2$. C'est donc un sommet de l'ellipse et ΩS_3 est le demi-petit axe.
Le cercle secondaire $(\mathscr{C}_s)$ est le cercle de centre Ω et de rayon, le demi-petit axe ΩS_3.

6 Le cercle directeur relatif au foyer B est le cercle de centre B et de rayon, le grand axe S_1S_2.

7 Soit P, le point d'intersection de la demi droite $[BC)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$.
Le point de $(\mathscr{E})$ situé sur la demi-droite $[BC)$ est le point d'intersection de la demi-droite $[BC)$ et de la médiatrice de $[B'P]$ où B' est le second foyer de $(\mathscr{E})$.
En effet, notons Q ce point. Comme Q est sur la médiatrice de $[PB']$, alors $QB' = QP$.
D'où $QB' + QB = QP + QB = PB = 2\,\Omega B$. Ce qui prouve que le point Q appartient à l'ellipse $(\mathscr{E})$.

8 Voir figure ci-dessus.

9 **a.** On appelle symétrie glissée, toute transformation qui peut s'écrire comme la composée commutative d'une translation et d'une réflexion d'axe dirigé par le vecteur de la translation.

b. Comme f est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de la symétrie, alors f une symétrie glissée.

<u>Vecteur de la symétrie glissée f</u>
$f(A) = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(A) = S_{(AC)}(B) = D$.
$f(D) = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(D) = S_{(AC)}(C) = C$.
f est une symétrie glissée telle que $f \circ f(A) = C$. On en déduit que le vecteur de la symétrie glissée f est $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

<u>Axe de la symétrie glissée f</u>
Comme $f(A) = D$, alors l'axe de la symétrie glissée f est la droite dirigée par $\overrightarrow{OC}$ et passant le milieu de $[AD]$. C'est par conséquent la droite (JI).

c. Voir figure.

Exercice 3

1 Comme $f(\alpha) = 0$, alors $1 - \alpha \ln \alpha = 0$.
On en déduit que $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$. D'où $\alpha = g(\alpha)$.
α est donc solution de l'équation $g(x) = x$.

2 Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n \in I$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
$u_0 = 2 \in I$.
$u_1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \in I$.
Donc les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.
Hérédité
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \in I$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \in I$.
On a : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que : $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3}$.
Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.
Or $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$ et $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} < 2$. D'où $u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \in I$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 g est continue et dérivable sur I.
De plus, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Comme $\alpha \in I$, on peut appliquer l'inégalité précédente en x quelconque où $x \in I$ et en $y = \alpha$.
On a alors :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Or $g(\alpha) = \alpha$. Il en résulte que : $\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
On peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ (car $u_n \in I$).
On a alors :

$$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$. Il en résulte que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
Comme $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$, alors $0 \leq 2 - \alpha \leq \frac{1}{2}$ donc $|u_0 - \alpha| = 2 - \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
Hérédité
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
D'après 4. a. $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$, et par hypothèse de récurrence, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Ainsi, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
<u>Conclusion</u>
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

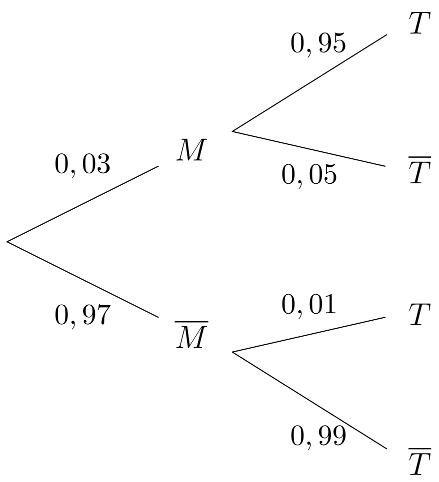
c. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

5 **a.** On cherche un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_0} \leq 10^{-1}$.
Par croissance de la fonction logarithme, on a : $n_0 \ln\frac{1}{2} \leq -\ln 10$.
D'où $n_0 \geq \dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ $(\approx 3,32)$.
On peut prendre $n_0 = 4$.

b. $u_1 = g(u_0) \approx 1,6487$; $u_2 = g(u_1) \approx 1,834$; $u_3 = g(u_2) \approx 1,725$; $u_4 = g(u_3) \approx 1,7855$.
$u_4 \approx 1,786$ est une valeur approchée de α.

Exercice 4

1



2 $p(M \cap T) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285$.
$p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,97 \times 0,99 = 0,9603$.

3 $p(T) = 0,03 \times 0,95 + 0,97 \times 0,01 = 0,0382$.
$p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 0,9618$.

4 **a.** $p(\overline{M}/T) = \dfrac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,97 \times 0,01}{0,0382} \approx 0,2539$.

b. $p(M/\overline{T}) = \dfrac{p(M \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,03 \times 0,05}{0,9618} \approx 0,0015$.

Correction bac 2016 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 L'algorithme d'Euclide donne :
$3024 = 2688 \times 1 + \boxed{336}$
$2688 = 336 \times 8 + 0$
Le PGCD étant le dernier reste non nul est donc égal à 336.

Comme PGCD $(2688; 3024) = 336$, alors il existe des couples (u, v) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $2688\,u + 3024\,v = 336$.
En multipliant membre à membre l'égalité précédente par -10, on a :
$2688\,(-10u) + 3024\,(-10v) = -3360$. On en déduit que les couples $(-10u, -10v)$ sont des solutions de l'équation (E).
Donc l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2 $2688x + 3024y = -3360 \iff \dfrac{2688}{336}x + \dfrac{3024}{336}y = -\dfrac{3360}{336} \iff 8x + 9y = -10.$
On en déduit que les équations (E) et (E_1) sont équivalentes.

3 **a.**

$$\begin{aligned} 8x + 9y = -10 &\iff 8x + 10 = 9(-y), \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 8x + 10 \text{ est un multiple de } 9 \\ &\iff 8x + 10 \equiv 0\,[9] \\ &\iff 8x \equiv -10\,[9] \end{aligned}$$

D'où les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

b. 1 est une solution particulière de l'équation (E_2) : $8x \equiv -10\,[9]$. En effet, $8 \times 1 = -10 + 9 \times 2 \equiv -10\,[9]$.

Soit x une solution de l'équation (E_2),

$$\begin{cases} 8x \equiv -10\,[9] \\ 8 \times 1 \equiv -10\,[9] \end{cases} \iff 8x \equiv 8 \times 1\,[9] \iff 8(x-1) \equiv 0\,[9] \iff 9 \text{ divise } 8(x-1).$$

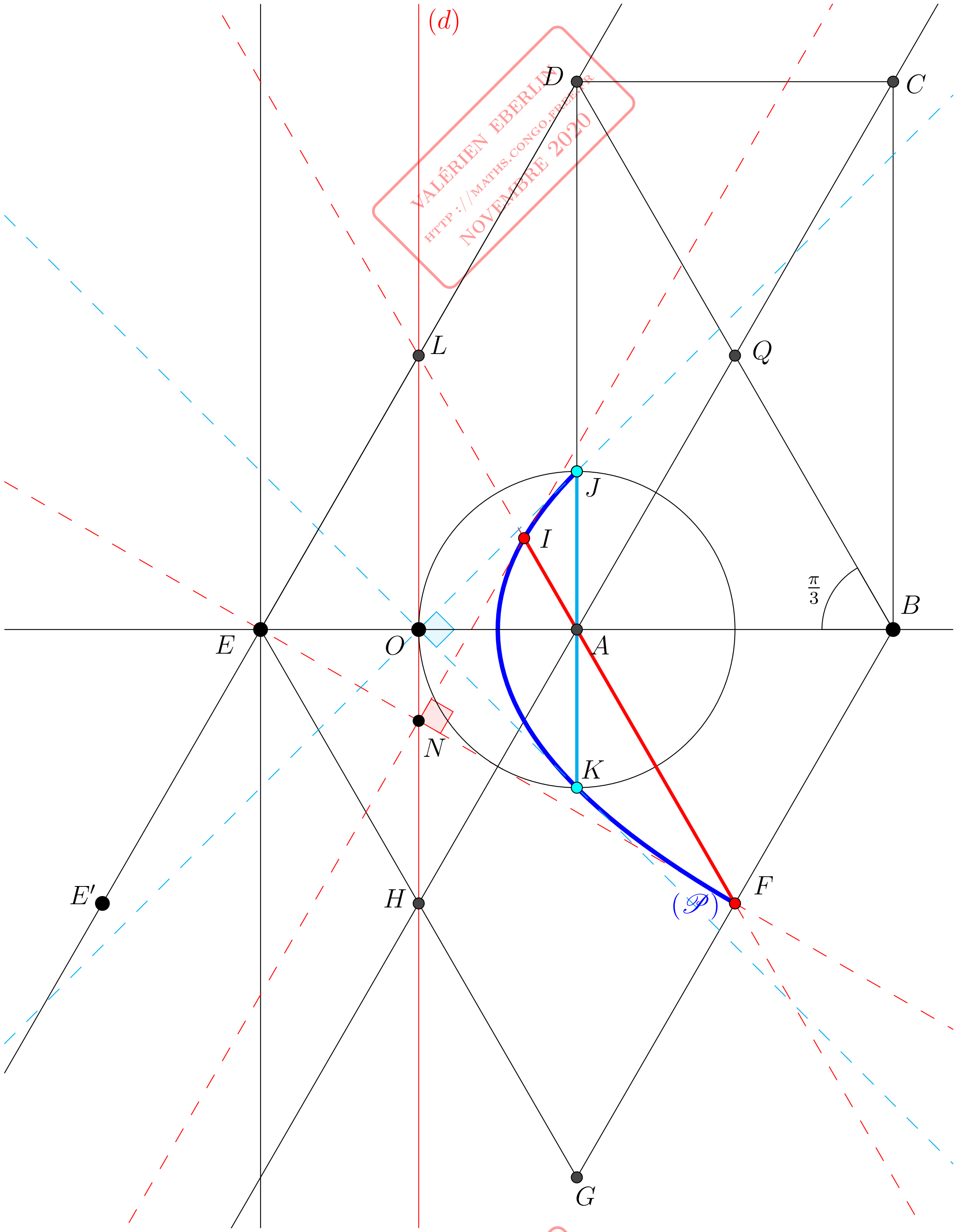
Comme 9 est premier avec 8, alors d'après le théorème de Gauss, 9 divise $x - 1$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 9k$. D'où $x = 1 + 9k$.
Les solutions de l'équation (E_2) sont l'ensemble $\{1 + 9k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c. En remplaçant x par $1+9k$ dans l'équation $8x+9y = -10$, on obtient : $y = -2-8k$.
Les solutions de l'équation (E_1) sont l'ensemble $S = \{(1 + 9k\,;\, -2 - 8k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Les équations (E) et (E_1) étant équivalentes, on en déduit que S est également l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 2

1



2 $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times \overline{((BD),(BA))} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

3 Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie, alors g est une symétrie glissée.

4 **a.** Les transformations f et $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$ ne sont pas égales

En effet, soit Q, le centre du rectangle $ABCD$.

$f(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)}(Q) = S_{(AD)}(F) = H$.

Mais $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(Q) = t_{\overrightarrow{BF}}(Q) = A$.
D'où $f \neq t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Montrons plutôt que $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Première solution

$$\begin{aligned} S_{(AD)} \circ R &= S_{(AD)} \circ R \\ &= S_{(AD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BE}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ t_{\overrightarrow{FE}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ \underbrace{S_{(AC)} \circ S_{(BG)}}_{t_{\overrightarrow{FE}}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \end{aligned}$$

Deuxième solution

$S_{(AD)} \circ R$ est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de symétrie. C'est donc une symétrie glissée.

Posons $u = S_{(AD)} \circ R$.
On a : $u(B) = S_{(AD)} \circ R(B) = S_{(AD)}(B) = E$ et $u(E) = S_{(AD)} \circ R(E) = S_{(AD)}(G) = G$.
D'où $u \circ u(B) = G$.
On en déduit que le vecteur de u est $\frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF}$.

De plus, comme $u(B) = E$, alors l'axe de u est la droite dirigée par $\overrightarrow{BF}$ passant par le milieu de $[BE]$. C'est par conséquent la droite (AC).

D'où $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

b. L'axe (AC) étant dirigé par $\overrightarrow{BF}$, $S_{(AD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{3})}$ est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{BF}$ et d'axe (AC).

5 La tangente et la normale à la parabole $(\mathscr{P})$ en F, coupent l'axe focal en deux points E et B. Donc le foyer de la parabole $(\mathscr{P})$ est le milieu de $[EB]$. D'où A est le foyer de $(\mathscr{P})$.

6 H est le symétrique du foyer A de la parabole $(\mathscr{P})$ par rapport à la tangente (EF) à $(\mathscr{P})$. On en déduit que H est un point de la directrice (d).
D'où (d) est la perpendiculaire à l'axe focal (EB) passant par H. C'est par conséquent la droite (HL).

7 Les tangentes en les deux extrémités d'une corde focale d'une parabole sont sécantes en un point de la directrice et sont perpendiculaires.

Construction du point I

Soit N le point d'intersection de la tangente (FE) et de la directrice (d).
Le point I de $(\mathscr{P})$ est le point d'intersection de la demi-droite $[FA)$ et de la perpendiculaire à la droite (EF) en N.

8 Soit O le point d'intersection de l'axe focal (EB) et de la directrice (d).
J et K sont symétriques par rapport à (EB) et les tangentes en J et en K à $(\mathscr{P})$ sont sécantes en O et sont perpendiculaires.

Constructions de J et K

Les points J et K sont donc les points d'intersection de la droite (AD) et du cercle de centre A et de rayon AO.

9 Voir figure ci-dessus.

10 **a.**

$$\begin{aligned} f = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} &= S_{(AD)} \circ g \\ &= \underbrace{S_{(AD)} \circ R}\circ R \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(A) &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(A) \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(F) \\ &= t_{\overrightarrow{BF}}(E) \end{aligned}$$

Comme A est le foyer de la parabole $(\mathscr{P})$, alors le foyer de la parabole $(\mathscr{P}')$ est le point E' tel que $BFE'E$ soit un parallélogramme.

b.

$f(A) = E' \in (ED)$.

$f(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(B) = t_{\overrightarrow{BF}}(L) = E$.

Comme (AB) est l'axe focal $(\mathscr{P})$, alors (ED) est le foyer de la parabole $(\mathscr{P}')$.

Exercice 3

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ est : $r^2 + 2r + 2 = 0$. Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$.

On en déduit que la solution générale est : $y(x) = \mathrm{e}^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

La solution particulière f est de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ avec $f(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

$$\begin{cases} f(\dfrac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \\ f'(\dfrac{\pi}{2}) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.

2 **a.**

F est une primitive de f si : $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad (-A + B)\cos x + (-A - B)\sin x = \sin x$.

Par identification, $-A + B = 0$ et $-A - B = 1$.

D'où $A = B = -\dfrac{1}{2}$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR NOVEMBRE 2020

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x)}{2}$.

b. $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)}{2}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\pi}\right)^{n}.$

3 **a.** $\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\pi}\right)^{n+1}}{\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\pi}\right)^{n}} = -\mathrm{e}^{-\pi}.$

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-\pi}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}$.

b. $S_n = v_0+v_1+\cdots+v_n = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\left(1+(-\mathrm{e}^{-\pi})+\cdots+(-\mathrm{e}^{-\pi})^{n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1-(-\mathrm{e}^{-\pi})^{n+1}\right).$

Comme $|-\mathrm{e}^{-\pi}| = \mathrm{e}^{-\pi} < 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-\pi})^{n+1} = 0$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1 Tableau linéaire associé :

X	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Y	-1	-1	2	3	-1	-1	2	2	2	3

2 Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

Série marginale de X

X	1	2
$n_{i\bullet}$	4	6

Série marginale de Y

Y	-1	2	3
$n_{\bullet j}$	4	4	2

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{10}\left[4\times 1^2+6\times 2^2\right] - 1,6^2 = 0,24.$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}\,y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{10}\left[4\times(-1)^2+4\times 2^2+2\times 3^2\right] - 1^2 = 2,8.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y}\\ &= \frac{1}{10}(2\times(-1)+1\times 2+1\times 3+2\times(-2)+3\times 4+1\times 6) - 1,6\times 1\\ &= 0,1\end{aligned}.$$

D'où le coefficient de corrélation entre X et Y :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,24}\times\sqrt{2,8}} = 0,1219$$

3 D'après 1. et sachant que $\overline{X} = 1,6$ et $\overline{Y} = 1$, les vecteurs centrés ont pour coordonnées :
$X - \overline{X} = (-0,6\,;\, -0,6\,;\, -0,6\,;\, -0,6\,;\, 0,4\,;\, 0,4\,;\, 0,4\,;\, 0,4\,;\, 0,4\,;\, 0,4)\,;$
$Y - \overline{Y} = (-2\,;\, -2\,;\, 1\,;\, 2\,;\, -2\,;\, -2\,;\, 1\,;\, 1\,;\, 1\,;\, 2)$.
Le cosinus de l'angle formé par les vecteurs centrés $X - \overline{X}$ et $Y - \overline{Y}$ est donné par la relation : $\cos\left(\widehat{(X - \overline{X}), (Y - \overline{Y})}\right) = \rho_{X,Y}$.

D'où cet angle vaut : $\left(\widehat{(X - \overline{X}), (Y - \overline{Y})}\right) = \cos^{-1}(0,1219) \approx 83°$.

Correction bac 2017 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

a Comme PGCD $(48;35)=1$, d'après le théorème de Bézout, l'équation $(E): 48x+35y=1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b $48\times(-8)=-384=1+35\times(-11)\equiv 1\,[35]$.

D'où 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c

$$\begin{aligned}48x+35y=1 &\iff 48x-1=35(-y),\ \text{avec } y\in\mathbb{Z}\\ &\iff 48x-1 \text{ est un multiple de } 35\\ &\iff 48x-1\equiv 0\,[35]\\ &\iff 48x\equiv 1\,[35]\end{aligned}$$

Les équations (E) : $48x+35y=1$ et $48x\equiv 1\,[35]$ sont équivalentes.

Solution particulière

D'après la question **b.**, $48\times(-8)+35\times 11=1$.

D'où $(-8\,;11)$ est une solution particulière de l'équation (E).

d -8 est une solution particulière de l'équation $48x\equiv 1\,[35]$.

Soit x une solution de l'équation $48x\equiv 1\,[35]$,

$$\begin{cases}48x\equiv 1\,[35]\\ 48\times(-8)\equiv 1\,[35]\end{cases}\iff 48x\equiv 48\times(-8)\,[35]\iff 48(x+8)\equiv 0\,[35]\iff 35 \text{ divise } 48(x+8).$$

Comme 35 est premier avec 48, alors d'après le théorème de Gauss, 35 divise $x+8$.

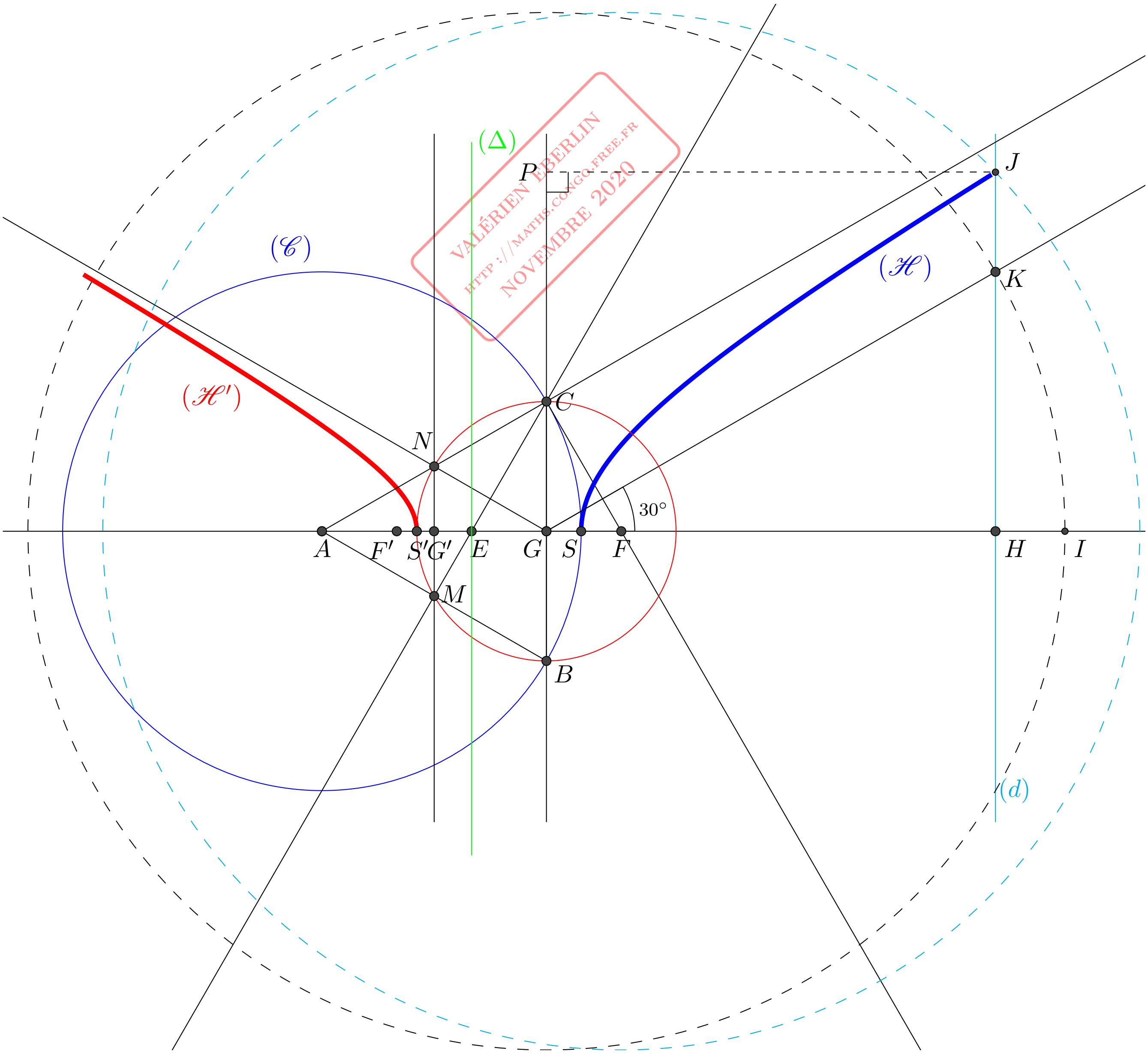
Il existe donc un entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+8=35k$. D'où $x=-8+35k$.

Les solutions de l'équation $48x\equiv 1\,[35]$ sont l'ensemble $\{-8+35k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

En remplaçant x par $-8+35k$ dans l'équation (E) : $48x+35y=1$, on obtient $y=11-48k$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(-8+35k\,;\,11-48k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 2



4 $EA = EC$ car E est le centre de gravité du triangle ABC.
$EA = EF$ car F est le symétrique de A par rapport à E.
On en déduit que $[EC]$ est la médiane relative au $[AF]$ et a pour longueur la moitié de la longueur de $[AF]$.
Donc le triangle ACF est rectangle en C et par conséquent les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

5 Axe focal
A étant le centre l'hyperbole, l'axe focal est la perpendiculaire à la directrice (BC) passant par A. C'est par conséquent la droite (AG).

F Foyer de (Γ)
C est un point d'intersection du cercle principal et de la directrice (BC).
On en déduit que la droite (AC) est une asymptote de l'hyperbole (Γ).

Or C est également le projeté orthogonal du point F de l'axe focal (AG) sur l'asymptote (AC). Donc F est un foyer de l'hyperbole (Γ).

6 **a.** Voir la figure ci-dessus.

b. $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{c}{a}$ représente l'excentricité de l'hyperbole (Γ).

Dans le triangle ABF rectangle en B, on a :

$\cos(\widehat{FAB}) = \cos(30°) = \dfrac{AB}{AF}$. D'où $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{1}{\cos(30°)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7 Soit K, le point d'intersection de la perpendiculaire à (AH) passant par H et de la parallèle à (AC) passant par G.

$\cos(\widehat{HGK}) = \cos(30°) = \dfrac{GH}{GK}$. D'où $GK = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH$.

Le point I est donc le point d'intersection du cercle de centre G de rayon GK et de la demi-droite $[GH)$.

8 Comme $J \in (\Gamma)$, alors $\dfrac{JF}{JP} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ où P est le projeté orthogonale de J sur la directrice (BC).

Or $JP = GH$ et d'après 7., on a : $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$.

On en déduit que $JF = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}JP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$

J est donc le point d'intersection de la droite (d) et du cercle de centre F de rayon GI.

9 Voir figure.

10 **a.**

Notons l'homothétie h par $h_{(A,\frac{1}{2})}$ et notons $h_{(\Omega,k)}$, l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

<u>Centre de la similitude $h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$</u>

G est aussi le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Soit Ω, le centre de la similitude s et (Δ) son axe.

Alors s s'écrit aussi en la composée commutative $s = h_{(\Omega,\frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ h_{(\Omega,\frac{1}{2})}$.
D'où $s \circ s = h_{(\Omega,\frac{1}{4})}$.

On a :

$s(A) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(A) = G$

$s \circ s(A) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(G) = h_{(A,\frac{1}{2})}(G) = G'$ où G' est le milieu de $[AG]$.

On en déduit que $h_{(\Omega,\frac{1}{4})}(A) = G'$.

Ou encore $\overrightarrow{\Omega G'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AG'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$.

D'où $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

Donc $\Omega = E$.

<u>Axe de la similitude $s = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$</u>

L'axe de la similitude (Δ) est la perpendiculaire à la droite (AG) passant par E.

b. Foyer de $(\mathscr{H}')$

$s(F) = h_{(E,\frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)}(F) = h_{(E,\frac{1}{2})}(A) = F'$ où F' est le milieu de $[AE]$.

Comme F est le foyer de $(\mathscr{H})$, alors F', milieu de $[AE]$, est le foyer de $(\mathscr{H}')$.

Directrice de $(\mathscr{H}')$

$s(B) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(B) = h_{(A,\frac{1}{2})}(B) = M$ où M est le milieu de $[AB]$.

$s(C) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(C) = h_{(A,\frac{1}{2})}(C) = N$ où N est le milieu de $[AC]$.

Comme (BC) est la directrice de $(\mathscr{H})$ associé au foyer F, alors (MN) est la directrice de $(\mathscr{H}')$ associée au foyer F'.

Asymptote de $(\mathscr{H}')$

$s(A) = G$ et $s(C) = N$.

Comme (AC) est l'asymptote de l'arc $(\mathscr{H})$, alors (GN) est l'asymptote de l'arc $(\mathscr{H}')$.

Sommet de $(\mathscr{H}')$

$s(A) = G$ et $s(C) = N$.

Comme le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A de rayon $[AC]$ est le cercle principal de $(\mathscr{H})$, alors le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre G et de rayon GN est le cercle principal de $(\mathscr{H}')$.

On en déduit que S', point d'intersection de $(\mathscr{C}')$ et de l'axe focal est le sommet de $(\mathscr{H}')$ associé à F'.

c. Toute similitude conserve le rapport des distances.

On en déduit que l'excentricité de (Γ') est égale à l'excentricité de (Γ) et vaut $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3

1 **a.** La fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue et $1 \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

b.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x+1)$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$F'(x) = f(x)$	0	$-$	0	$+$	

- $\forall x \in]0\,;1[$, $f(x) < 0$ et F est strictement décroissante.
- $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $f(x) > 0$ et F est strictement croissante.

2

L'inégalité $F(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$ pour $x \geq 2$ est fausse. En effet, en intégrant par parties $F(x)$, on trouve : $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right)\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} - 2\ln 2$.

D'où $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right)\ln(x+1) - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} - 2\ln 2$.

Le tableau des valeurs de $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ réalisé à l'aide d'un tableur, pour x allant de 2 à 2.9 avec un pas de 0.05, montre que $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 < 0$ pour au moins les valeurs de x comprises entre 2 et 2.8.

B2 =(0,5*(A2)*A2-(A2)-1,5)*LN((A2)+1)-0,75*(A2)*A2+2,5*(A2)+0,75-2*LN(2)

	A	B
1	Valeur de x	"Valeur de F(x)-1/2*(x-1)^2"
2	2	-0,284212794
3	2,05	-0,278730741
4	2,1	-0,272100307
5	2,15	-0,264254395
6	2,2	-0,255127398
7	2,25	-0,244655138
8	2,3	-0,232774812
9	2,35	-0,219424938
10	2,4	-0,204545301
11	2,45	-0,188076913
12	2,5	-0,169961959
13	2,55	-0,150143759
14	2,6	-0,12856673
15	2,65	-0,105176339
16	2,7	-0,079919076
17	2,75	-0,052742411
18	2,8	-0,023594766
19	2,85	0,007574517
20	2,9	0,040815211

Cependant, l'on peut établir que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$, ce qui permettra de répondre aux questions suivantes.

a. Montrons que : $\forall\, x \geq 2,\ \ F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$

Soit $x \geq 2$.

Comme $f(t) \geq t - 1$ pour tout $t \geq 2$.

Alors par passage à l'intégrale, on a : $\int_2^x f(t)\,dt \geq \int_2^x (t-1)\,dt$.

En ajoutant membre à membre l'expression $\int_1^2 f(t)\,dt$ à la dernière inégalité, on a :

$$\int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt \geq \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^x (t-1)\,dt.$$

Il en résulte que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$ pour tout $x \geq 2$.

b. Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

$\forall\, x \geq 2, \quad F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x.$

Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) \geq \lim_{x \to +\infty} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right).$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right) = +\infty.$ On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$

<u>Calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.</u>

$\forall\, x \geq 2, \quad F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x.$

Alors : $\forall\, x \geq 2, \quad \dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{1}{x}\left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right).$

Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \geq \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right).$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right) = +\infty.$ On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$

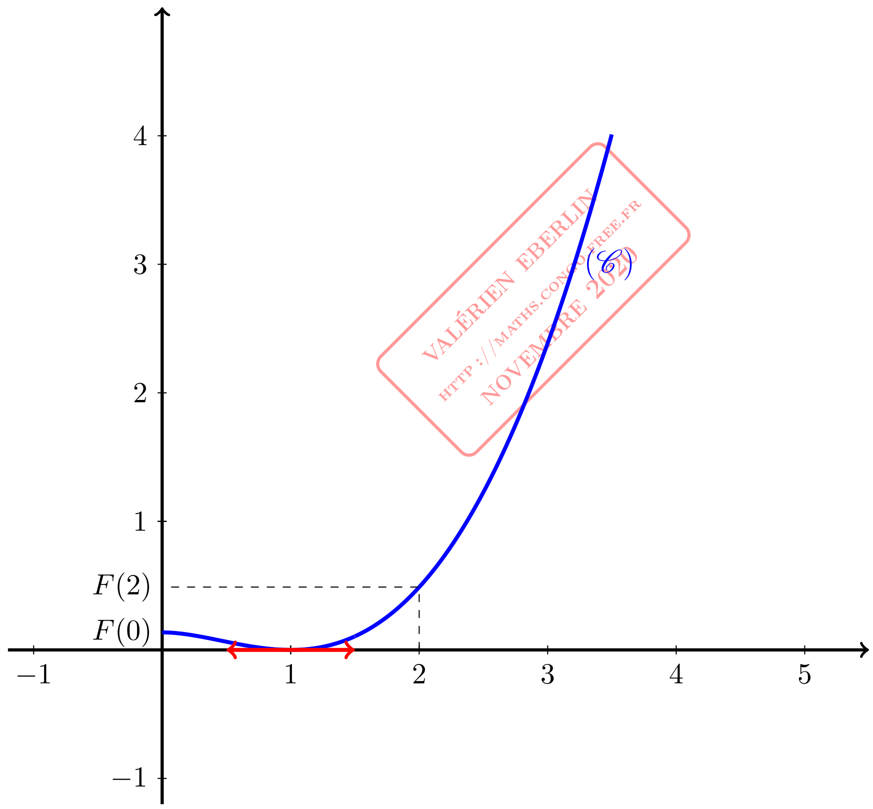
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

c.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$F(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

VALÉRIEN EBERLIN http://maths.congo.free.fr NOVEMBRE 2020

d.



3 **a.** $F(n+1)-F(n) = \displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_1^n f(t)\,dt = \int_n^1 f(t)\,dt + \int_1^{n+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$

D'où $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. <u>Erreur dans l'énoncé</u> : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on n'a pas $f(0) \leq u_0 \leq f(1)$ puisque

$f(0) = 0\,;\ f(1) = 0$ et $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = -\int_1^0 f(t)\,dt = -F(0) \neq 0$

<u>Montrons d'abord que f est croissante sur $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall\, x \in [n, n+1], \quad f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1} > 0.$

On en déduit que f est strictement croissante sur $[n, n+1]$.

<u>Montrons que $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

F est continue et dérivable sur $[n, n+1]$.

De plus, $F'(n) \leq F'(x) \leq F'(n+1)$ pour tout $x \in [n; n+1]$ car F' est croissante.

Or $F' = f$. D'où $f(n) \leq F'(x) \leq f(n+1)$ pour tout $x \in [n; n+1]$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x \in [n; n+1],\ \forall y \in [n; n+1] \text{ tels que } x \leq y,\ f(n)(y-x) \leq F(y)-F(x) \leq f(n+1)(y-x)$$

Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = n$ et $y = n+1$.

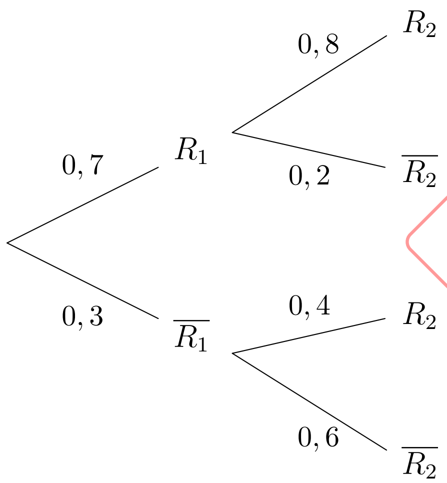
On a alors :

$$f(n)\Big((n+1)-n\Big) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n+1)\Big((n+1)-n\Big).$$

D'où $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.

Exercice 4

1



2 $p(R_1 \cap R_2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$

3 $p(R_2) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,4 = 0,68.$

4 $p(A) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,26.$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Correction bac 2018 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2\,[36] \\ x \equiv 3\,[25] \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2+36a \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \\ x = 3+25b \text{ avec } b \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff 2+36a = 3+25b \iff (E) : 36a-25b=1.$$

On en déduit que le système d'équations (S) et l'équation (E) sont équivalentes.

2 $36 \times (-9) - 25 \times (-13) = -324 + 325 = 1.$

Donc $(-9;-13)$ est solution de l'équation $(E) : 36a - 25b = 1.$

3

$$\begin{aligned} 36a - 25b = 1 &\iff 36a - 1 = 25b \quad \text{avec } b \in \mathbb{Z} \\ &\iff 36a - 1 \quad \text{est un multiple de } 25 \\ &\iff 36a - 1 \equiv 0\,[25] \\ &\iff 36a \equiv 1\,[25] \end{aligned}$$

On en déduit que les équations (E) et (E') sont équivalentes.

4 Comme $36 \times (-9) = 1 + 25 \times (-13)$, alors $36 \times (-9) \equiv 1\,[25]$.

Donc -9 est l'inverse de 36 modulo 25.

5

$$\begin{cases} 36a \equiv 1\,[25] \\ 36 \times (-9) \equiv 1\,[25] \end{cases} \iff 36a \equiv 36 \times (-9)\,[25] \iff 36(a+9) \equiv 0\,[25] \iff 25 \text{ divise } 36(a+9).$$

Comme 25 est premier avec 36, d'après le théorème de Gauss, 25 divise $a+9$.

Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a + 9 = 25k$. D'où $a = -9 + 25k$.

Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{-9 + 25k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

6

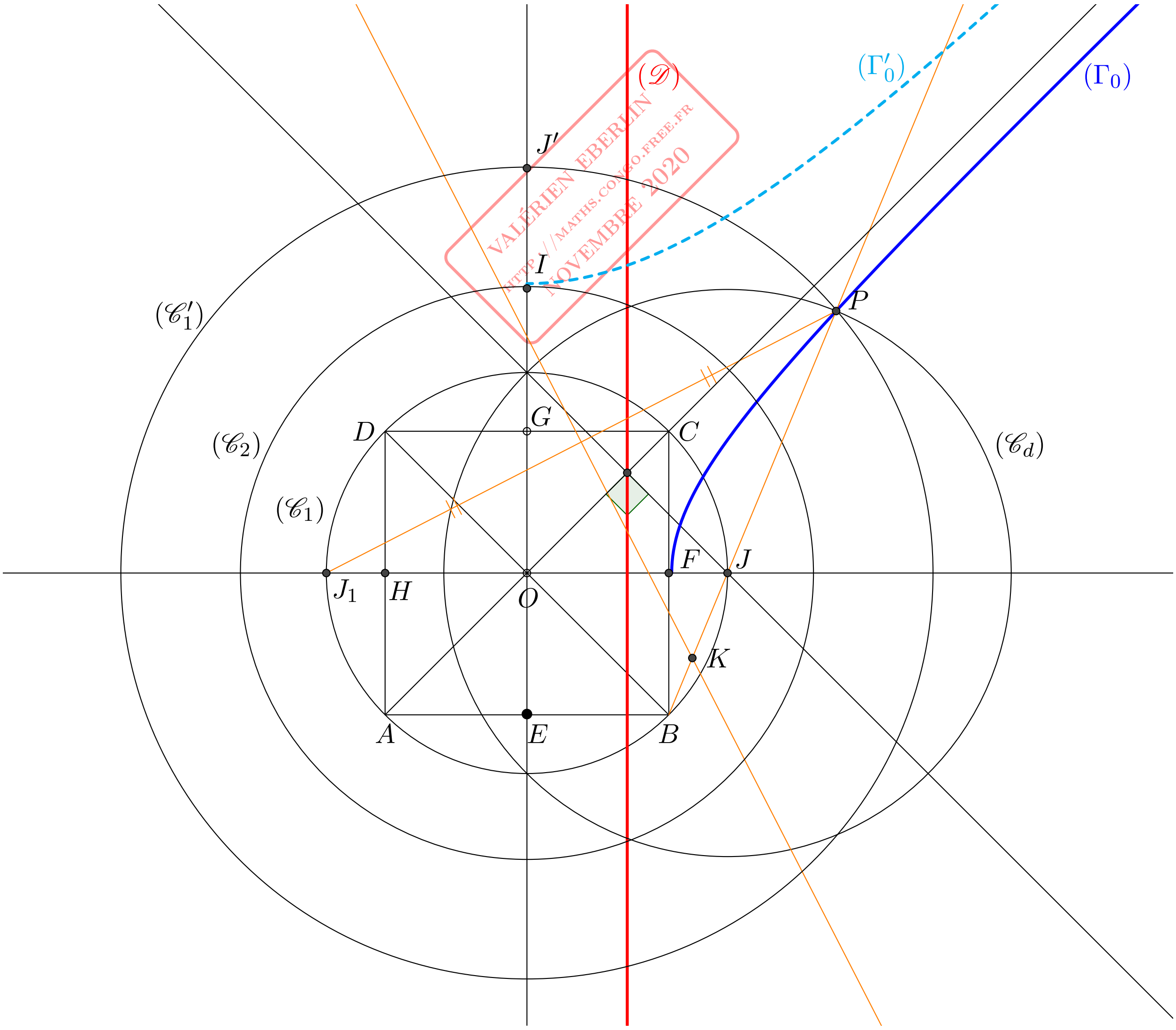
a. En remplaçant a par $-9+25k$ dans l'équation $36a-25b = 1$, on obtient $b = -13+36k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{(-9 + 25k\,;\, -13 + 36k) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

b. Soit x une solution de (S).
x est de la forme $x = 2 + 36a$ où $a \in (E')$.
D'après la question précédente, a s'écrit $a = -9 + 25k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
D'où $x = 2 + 36a = 2 + 36(-9 + 25k) = -322 + 900k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 0 < x < 50 &\iff 0 < -322 + 900k < 50 \\ &\iff \frac{322}{900} < k < \frac{372}{900} \end{aligned}$$

Il n'existe pas d'entier k compris entre $\dfrac{322}{900}$ et $\dfrac{372}{900}$. Donc le système (S) n'admet pas de solution x telle que $0 < x < 50$.

Exercice 2



1 Voir figure.

2 **a.** (OF) est l'axe focale.
De plus, OC est la demi-distance focale.
Donc J est le point d'intersection du cercle $(\mathscr{C}_1)$ et de la demi-droite $[OF)$.

b. J étant un foyer de (Γ), le projeté orthogonal de J sur l'une des diagonales $[AC]$ ou $[BD]$ est un point de la directrice associé à J.
D'où $(\mathscr{D})$ est la droite perpendiculaire à l'axe focal (OF) et passant par le projeté orthogonal de J sur l'une des diagonales du rectangle fondamental.

c. Notons :

- J_1 le second foyer de l'hyperbole (Γ) ;
- $(\mathscr{C}_d)$ le cercle directeur associé à J c'est à dire le cercle de centre J et de rayon $2 \times OF = 4$;
- P le point d'intersection de $[BJ)$ et de $(\mathscr{C}_d)$.

K est alors le point d'intersection de la médiatrice de $[J_1P]$ et de $[BJ)$.
En effet,

$KJ_1 - KJ = KJ_1 - (KP - JP) = KJ_1 - KP + 4$.
Comme K est un point de la médiatrice du segment $[J_1P]$ alors $KJ_1 = KP$.
D'où $KJ_1 - KJ = 4$.
Ce qui prouve que K est un point de l'hyperbole (Γ).

d. $[OC)$ est la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.

e. Construire K' symétrique de K par rapport à l'axe focal (OF).
À partir des points F et K' et sachant que $[OC)$ est une asymptote à (Γ_0), on donne une allure de (Γ_0).

3 Notons Ω le centre de la similitude S, $h_{(\Omega,2)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport 2 et $S_{(AC)}$ la symétrie axiale d'axe (AC).
S s'écrit donc $S = h_{(\Omega,2)} \circ S_{(AC)}$ avec $\Omega \in (AC)$.

Déterminons le centre Ω

$S(F) = I$.
$S(F) = h_{(\Omega,2)} \circ S_{(AC)}(F) = h_{(\Omega,2)}(G)$.
On en déduit que $h_{(\Omega,2)}(G) = I$ et par conséquent $2\overrightarrow{\Omega G} = \overrightarrow{\Omega I}$.
En appliquant la relation de Chasles dans l'égalité précédente, on a :
$2\overrightarrow{\Omega O} + 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OI}$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\Omega O} = \overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$ car I est le symétrique de O par rapport à G.
D'où $\Omega = O$.

4 **a.** Le rectangle fondamental de (Γ) étant un carré, (Γ) est une hyperbole équilatère.
Comme toute similitude conserve la nature des figures, alors le rectangle fondamental de (Γ') est un carré. Donc (Γ') est une hyperbole équilatère.

b. Toute similitude conserve le rapport des distances. On en déduit que (Γ) et (Γ') ont même excentricité. Donc l'excentricité de (Γ') est $\frac{OC}{OF} = \sqrt{2}$.

c. $S(O) = O$ et $S(F) = I$.
Comme le cercle de centre O et de rayon OF est le cercle principal de (Γ), alors le cercle de centre O et de rayon OI est le cercle le cercle principal de (Γ').

d. $S(A) = h_{(O,2)} \circ S_{(AC)}(A) = h_{(O,2)}(A) \in (AC)$.
$S(C) = h_{(O,2)} \circ S_{(AC)}(C) = h_{(O,2)}(C) \in (AC)$.
La droite (AC) est stable par la similitude S. On en déduit que c'est une asymptote de (Γ').

De même,
$S(B) = h_{(O,2)} \circ S_{(AC)}(B) = h_{(O,2)}(D) \in (BD)$.
$S(D) = h_{(O,2)} \circ S_{(AC)}(D) = h_{(O,2)}(B) \in (BD)$.
La droite (BD) est stable par la similitude S. On en déduit que c'est la seconde asymptote de (Γ').

e. $S(O) = O$ et $S(F) = I$.
Comme (OF) est l'axe focal de (Γ), alors (OI) est l'axe focal de (Γ').

Exercice 3

Partie A

1 $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[\,:\quad g'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x.$

2 $\forall\, x \in]0\,;\, +\infty[\,:\quad g'(x) > 0.$

D'où le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ -1	$\nearrow$	$+\infty$

3 **a.** $g(\frac{1}{2}) \approx -0,17$ et $g(1) \approx 1,71$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

De plus $g\left(\frac{1}{2}\right).g(1) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

De plus, $g(\alpha) = 0$.

On en déduit que :

- $\forall\, x \in]0;\alpha[,\quad g(x) < 0.$
- $\forall\, x \in]\alpha;+\infty[,\quad g(x) > 0.$

Partie B

4 $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty.$

5 $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}.$

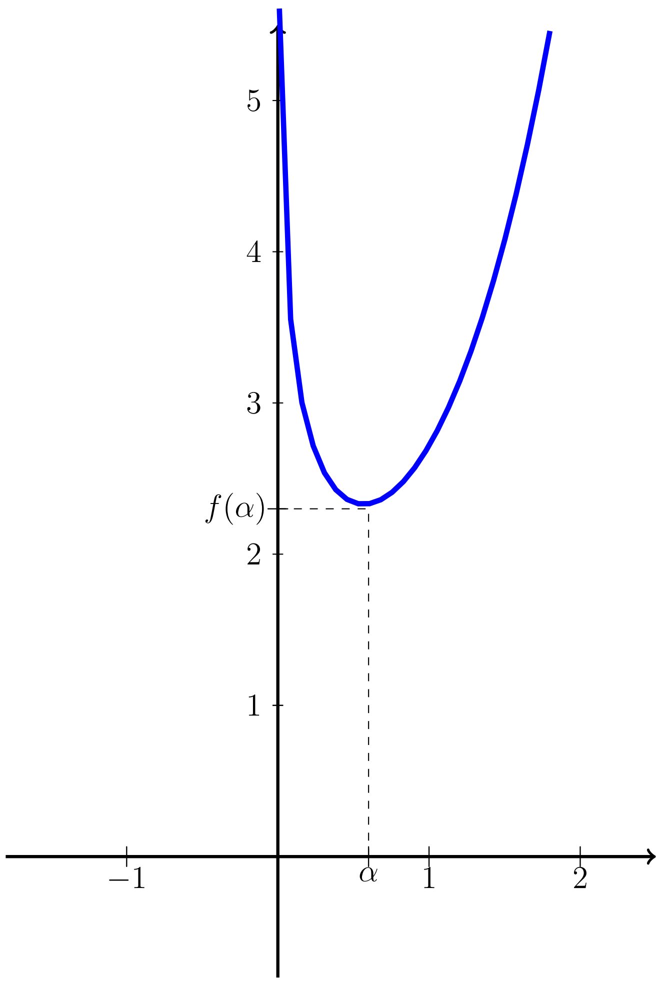
6 **a.** f' est du signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

b. f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.
De plus, f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$ puis croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.
Donc f admet un minimum en α.
α vérifie $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha} - 1}{\alpha} = 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ et que $\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}}$.
En remplaçant e^{α} par $\dfrac{1}{\alpha}$ et α par $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}}$ dans l'expression $f(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha} - \ln\alpha$, on a :
$f(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha} - \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha} - \ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha} + \alpha$.
Donc le minimum est atteint en $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

7



Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

Loi marginale de X.

X	2	3
$n_{i\bullet}$	5	8

Loi marginale de Y.

Y	-1	2	3
$n_{\bullet j}$	3	3	7

2

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i\bullet}x_i = \frac{5\times 2 + 8\times 3}{13} = \frac{34}{13}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{3} n_{\bullet j}y_j = \frac{3\times(-1) + 3\times 2 + 7\times 3}{13} = \frac{24}{13}$$

Les coordonnées du point moyen sont G sont $\left(\frac{34}{13}, \frac{24}{13}\right)$.

3 **a.**

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}x_iy_j - \overline{X}.\overline{Y}\\ &= \frac{1}{13}\big(2\times(-2) + 3\times 6 + 1\times(-3) + 3\times 6 + 4\times 9\big) - \frac{34}{13}\times\frac{24}{13}.\\ &= \frac{29}{169}\end{aligned}$$

b. L'équation de régression linéaire de Y en X est donnée par l'équation :

$Y = aX + b$ où $a = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2} n_{i\bullet}x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{13}(5\times 2^2 + 8\times 3^2) - \left(\frac{34}{13}\right)^2 = \frac{40}{169}.$$

$$a = \frac{\frac{29}{169}}{\frac{40}{169}} = \frac{29}{40} \quad \text{et} \quad b = \frac{24}{13} - \frac{29}{40}\times\frac{34}{13} = -\frac{1}{20}.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire : $Y = \dfrac{29}{40}X - \dfrac{1}{20}$.

Correction bac 2019 - Série C

▶ Voir le sujet. ▶ Retour au sommaire.

Exercice 1

1 Déterminons le PGCD de 109 et 226 par l'algorithme d'Euclide donne :

$$\begin{aligned} 226 &= 109 \times 2 + 8 \\ 109 &= 8 \times 13 + 5 \\ 8 &= 5 \times 1 + 3 \\ 5 &= 3 \times 1 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + \boxed{1} \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, il est donc égal à 1.

2 PGCD(109 ; 226)=1. D'après le théorème de Bézout, l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3 $109 \times 141 = 15369 = 1 + 226 \times 68 \equiv 1\,[226]$.
D'où 141 est l'inverse de 109 modulo 226.

4 **a.**

$$\begin{aligned} 109x - 226y = 1 &\iff 109x - 1 = 226y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 109x - 1 \text{ est un multiple de } 226 \\ &\iff 109x - 1 \equiv 0\,[226] \\ &\iff 109x \equiv 1\,[226] \end{aligned}$$

Les équations (E) et (E') sont équivalentes.

b. 141 est une solution particulière de l'équation $109x \equiv 1\,[226]$.
Soit x une solution de l'équation $109x \equiv 1\,[226]$,

$$\begin{cases} 109x \equiv 1\,[226] \\ 109 \times 141 \equiv 1\,[226] \end{cases} \iff 109x \equiv 109 \times 141\,[226] \iff 109(x - 141) \equiv 0\,[226]$$

$$\iff 226 \text{ divise } 109(x - 141).$$

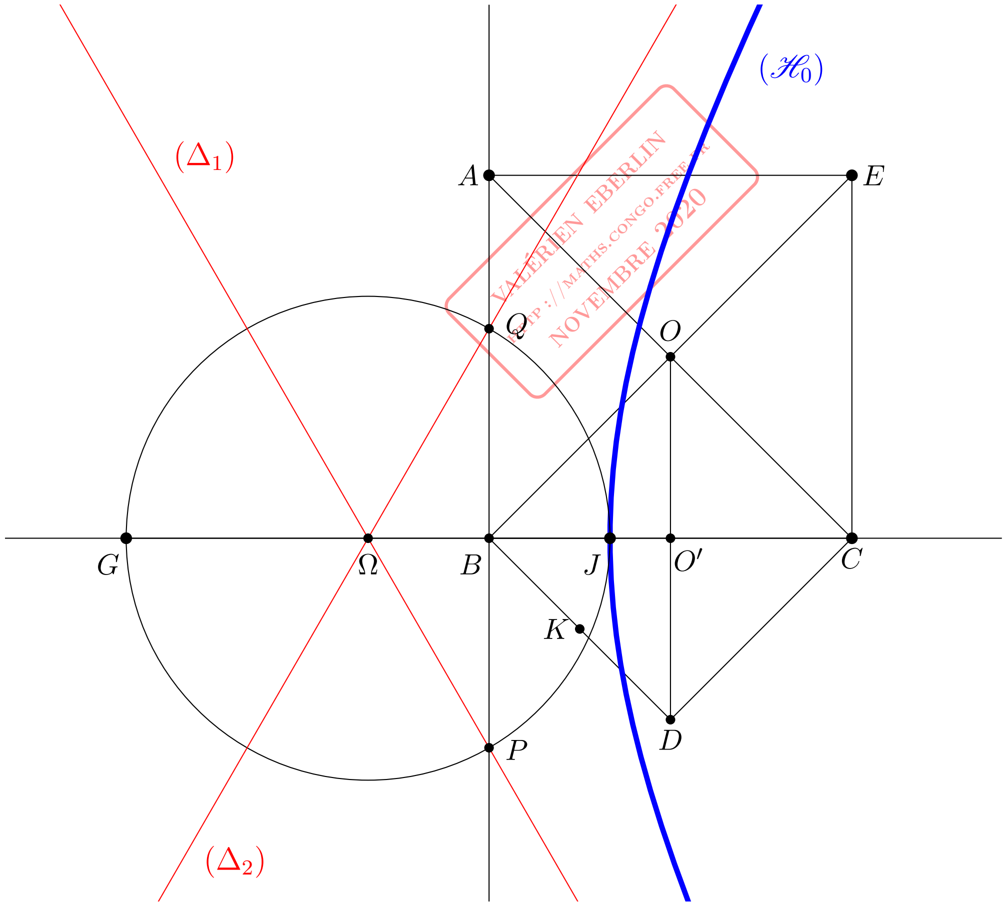
Comme 226 est premier avec 109, alors d'après le théorème de Gauss, 226 divise $x - 141$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 141 = 226k$. D'où $x = 141 + 226k$.
Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{141 + 226k \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$.

c. En remplaçant x par $141 + 226k$ dans l'équation (E) : $109x - 226y = 1$, on obtient : $y = 68 + 109k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(141 + 226k\,,\, 68 + 109k) \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Exercice 2

1



2 **a.** Le centre de rotation de f est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OD]$ et $[AC]$. C'est le point B.

b. Comme $f(B) = B$ et $f(A) = C$, alors $\theta = \overline{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

c. $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times \overline{((BO), (BA))} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'où $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la réciproque de f.

3 **a.** Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie, alors g est une symétrie glissée.

b. $g(B) = S_{(OD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{2})}(B) = S_{(OD)}(B) = C$.

$g(C) = S_{(OD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{2})}(C) = S_{(OD)}(A) = E$.

c. $g \circ g(B) = g(C) = E$.

g est une symétrie glissée telle que $g \circ g(B) = E$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ de g vérifie $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO}$.

d. Comme $g(B) = C$ alors l'axe de g est la droite dirigée par $\overrightarrow{BO}$ et passant par le milieu O' du segment $[BC]$. C'est par conséquent la droite (KO').

e.

$$
\begin{aligned}
M \in (\Gamma) &\iff g(M) = f^{-1}(M) \\
&\iff S_{(OD)}\left(R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M)\right) = R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M) \text{ car } f^{-1} \text{ est la rotation de centre } B \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2} \\
&\iff R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M) \in (OD) \\
&\iff M \in R^{-1}_{(B,\frac{\pi}{2})}((OD)) = R_{(B,-\frac{\pi}{2})}((OD))
\end{aligned}
$$

(Γ) est alors la droite $R_{(B,-\frac{\pi}{2})}((OD))$. C'est par conséquent une droite perpendiculaire à (OD).

Comme $R_{(B,-\frac{\pi}{2})}(O) = D$, on en déduit que (Γ) est la droite perpendiculaire à (OD) passant par le point D.

4 **a.** Soit S un sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$, d'excentricité 2.

$\dfrac{SC}{SB} = 2 \iff SC^2 - 4SB^2 = 0 \iff (\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB}).(\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB}) = 0.$

Comme les points B, C et S sont alignés, alors $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{0}$.

<u>Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{0}$</u>

$\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}$. D'où $S = G$.

Donc G est le premier sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

<u>Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{0}$</u>

$\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{BS} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où $S = J$ par définition du point J.

Donc J est le second sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

b. Le centre Ω est le milieu du segment $[GJ]$.

c. Les asymptotes sont données par les droites (ΩP) et (ΩQ) où P et Q sont les points d'intersection du cercle principal et de la directrice (BA) (voir figure).

d. Voir figure ci-dessus.

e. Soit (x, y) les coordonnées d'un point M de $(\mathscr{H})$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $H(0, y)$ le projeté orthogonal de M sur la directrice (BA).

Le foyer C a pour coordonnée $C(1, 0)$.

$M \in (\mathscr{H}) \iff \dfrac{MC}{MH} = 2$

$MC^2 = 4MH^2 \iff (1 - x)^2 + y^2 = 4x^2.$

D'où l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$: $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$.

Exercice 3

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ est $r^2 + 3r + 2 = 0$.

Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$.

Donc la solution générale est : $y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 h est de la forme $h(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $h'(0) = 1$.

$$
\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}
$$

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\,\mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}$.

3

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-\,\mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} -\,\mathrm{e}^{-2x}(1 - 2\,\mathrm{e}^{x}) = -\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-\,\mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}) = 0.$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}(1 - \mathrm{e}^{x})$.

c. $f'(x)$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{x}$ et s'annule pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty[$.

d. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

e. $f(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-2x}(-1 + 2\,\mathrm{e}^{x}) = 0 \iff -1 + 2\,\mathrm{e}^{x} = 0 \iff x = -\ln 2.$

Le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-\ln 2, 0)$.

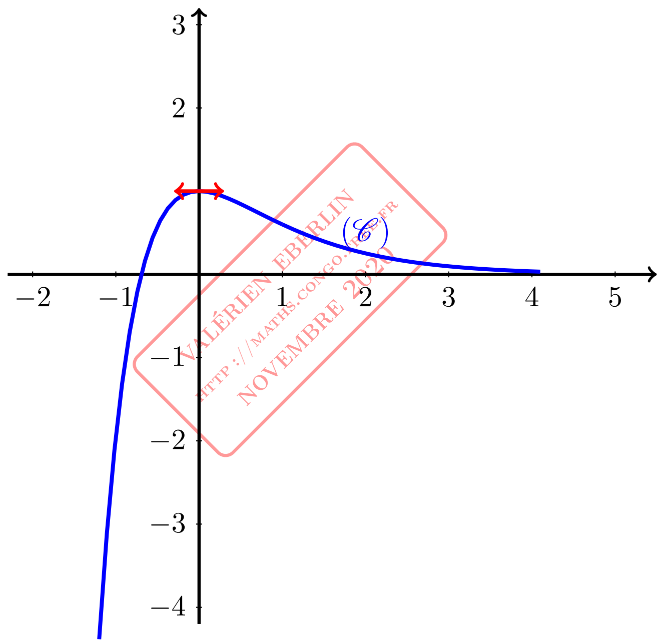
f.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\,\mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\,\mathrm{e}^{-2x}}{x}(1 - 2\,\mathrm{e}^{x}) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2u}}{u}(1 - 2\,\mathrm{e}^{-u}) = +\infty$$

où l'on a posé $u = -x$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

g.

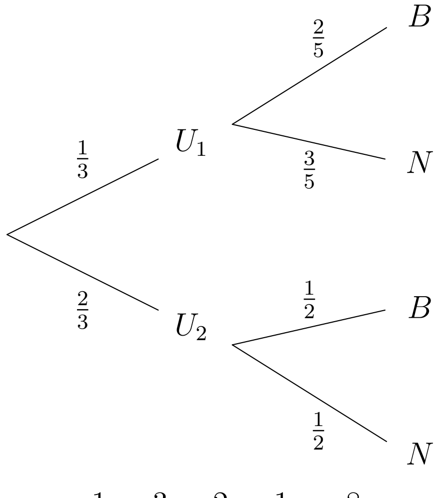


Exercice 4

1 **a.** $p(\mathscr{U}_1) = p($« *obtenir 1 ou 2 sur la face supérieure du dé* » $) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

b. $p(\mathscr{U}_2) = 1 - p(\mathscr{U}_1) = \dfrac{2}{3}$.

2



3 $p(\mathscr{N}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{15}$.

4 $p(\mathscr{U}_1/\mathscr{N}) = \dfrac{p(\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{N})}{p(\mathscr{N})} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \dfrac{3}{8}$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
NOVEMBRE 2020

Correction bac 2020 - Série C

► Voir le sujet. ► Retour au sommaire.

Exercice 1

1

$$\begin{aligned} 2x - 7y = 3 &\iff 2x - 3 = 7y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2x - 3 \text{ est un multiple de } 7 \\ &\iff 2x - 3 \equiv 0\,[7] \\ &\iff 2x \equiv 3\,[7] \end{aligned}$$

D'où les équations (E_0) et (E_1) sont équivalentes.

2 Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $2x \equiv 3\,[7]$

2 et -7 étant premiers entre eux, déterminons $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $2u - 7v = 1$.
De l'égalité $7 = 2 \times 3 + 1$, on en déduit que $2 \times (-3) - 7 \times (-1) = 1$.
En multipliant membre à membre l'égalité précédente par 3, on obtient : $2 \times (-9) - 7 \times (-3) = 3$.
On en déduit que $(-9, -3)$ est une solution particulière de (E_1) et on a $2 \times (-9) \equiv 3\,[7]$.

Déterminons l'ensemble de solutions de l'équation (E_1)

$$\begin{cases} 2x \equiv 3\,[7] \\ 2 \times (-9) \equiv 3\,[7] \end{cases} \iff 2x \equiv 2 \times (-9)\,[7] \iff 2(x+9) \equiv 0\,[7] \iff 7 \text{ divise } 2(x+9).$$

Comme 7 est premier avec 2, alors d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x + 9$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 9 = 7k$. D'où $x = -9 + 7k$.
Les solutions de l'équation (E_1) sont l'ensemble $\{-9 + 7k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3 En remplaçant x par $-9+7k$ dans l'équation (E_0) : $2x-7y = 3$, on obtient : $y = -3+2k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est l'ensemble $\{(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4 **a.** $A = \{1\,;\,5\,;\,19\,;\,95\}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Comme $2x - 7y = 3$, alors $2x - 7y > 0$. Donc $x > y$.

En utilisant 4. a., on en déduit que les solutions (x, y) de l'équation $xy = 95$ vérifiant $x > y$ appartiennent à l'ensemble : $I = \Big\{(95, 1)\,,\ (-1, -95)\,,\ (-5, -19)\,,\ (19, 5)\Big\}$.

Déterminons le couple $(x, y) \in I$ solution de l'équation $2x - 7y = 3$

- $2 \times 95 - 7 \times 1 \neq 3$. Donc $(95, 1)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-1) - 7 \times (-95) \neq 3$. Donc $(-1, -95)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times (-5) - 7 \times (-19) \neq 3$. Donc $(-5, -19)$ n'est pas solution de l'équation $2x - 7y = 3$.
- $2 \times 19 - 7 \times 5 = 3$. Donc $(19, 5)$ est solution de l'équation $2x - 7y = 3$.

D'où $(19, 5)$ est le seul couple solution du système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Autre méthode

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

(x, y) vérifie $2x - 7y = 3$. D'après 3., (x, y) est de la forme $(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

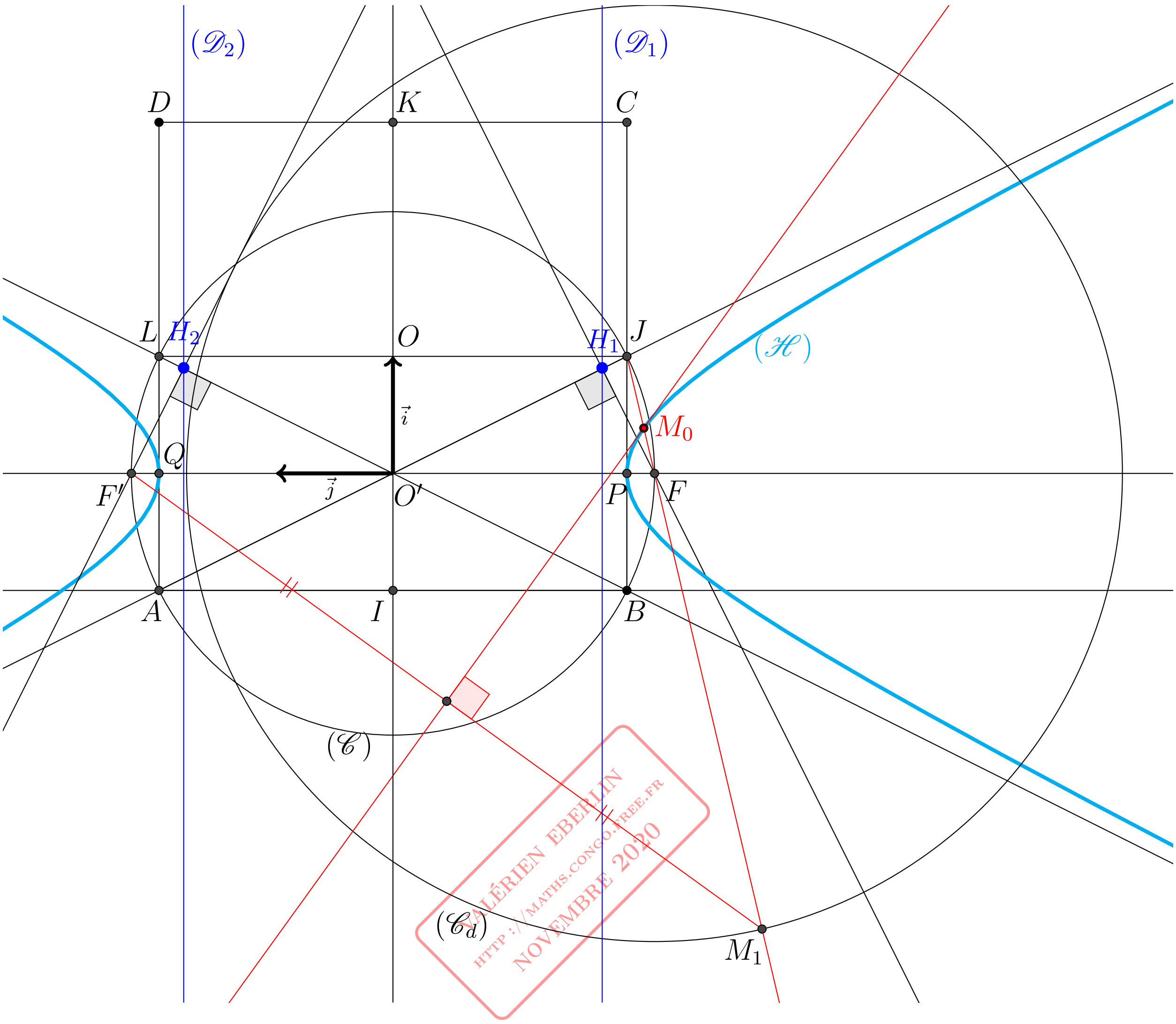
Et, $(-9 + 7k\,,\ -3 + 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $xy = 95$ si $(-9 + 7k)(-3 + 2k) = 95$ ou encore $14k^2 - 39k - 68 = 0$.
L'équation $14k^2 - 39k - 68 = 0$ admet dans $\mathbb{Z}$ une seule solution $k = 4$.

En remplaçant k par 4 dans $(-9+7k\,,\ -3+2k)$, on a $(-9+7\times4, -3+2\times4) = (19, 5)$.

Donc $(19, 5)$ est le seul couple solution du système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$

Exercice 2

1



2 **a.** Déterminons le vecteur $\vec{u}$

$f(D) = I$.

$f(D) = t_{\vec{u}} \circ S_{(OL)}(D) = t_{\vec{u}}(A)$.

On en déduit que $t_{\vec{u}}(A) = I$. D'où $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$.

b. Déterminons $f(K)$

$f(K) = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(OL)}(K) = t_{\overrightarrow{AI}}(I) = B$.

3 **a.** Les asymptotes de $(\mathscr{H})$ sont les droites (AJ) et (BL).

b. Les foyers sont les points d'intersection du cercle fondamental (cercle de centre O' et de rayon $O'J$) et de l'axe focal (PQ).

c. P et Q sont les sommets de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

d. Le projeté orthogonal H_1 du foyer F sur la diagonale $[AJ]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F.

D'où $(\mathscr{D}_1)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_1.

De même, le projeté orthogonal H_2 du foyer F' sur la diagonale $[LB]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associé au foyer F'.

D'où $(\mathscr{D}_2)$ est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_2.

e. Soit M_1 le point d'intersection de la demi-droite $[JF)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$ associé à F (cercle de centre F et de rayon $2 \times O'P$).

Alors, M_0 est le point d'intersection de la médiatrice de $[F'M_1]$ et du segment $[FJ]$.

En effet,

$M_0F' - M_0F = M_0M_1 - M_0F = FM_1 = 2 \times O'P$. Ce qui prouve que $M_0 \in (\mathscr{H})$.

f. $O'P = 3$ et $O'J = \sqrt{OP^2 + PJ^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

D'où l'excentricité $e = \dfrac{O'J}{O'P} = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

g. Voir figure.

4 **a.** $(O', \vec{j})$ et $(O', \vec{i})$ étant respectivement l'axe focal et l'axe non focal de $(\mathscr{H})$, on en déduit que l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$ est : $-\dfrac{x^2}{O'O^2} + \dfrac{y^2}{O'Q^2} = 1$.

Or $O'O = \|\vec{i}\| = 1$ et $O'Q = 2 \times \|\vec{j}\| = 2$.

D'où l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$: $-\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ ou encore $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = -1$.

b. Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathscr{H})$ et H le projeté orthogonal de M sur la directrice $(\mathscr{D}_1)$ associé à F.

Montrons que $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

De l'équation $(\mathscr{H})$: $-\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$, on en déduit que l'hyperbole $(\mathscr{H})$:

- a pour sommets les points : $Q(0, 2)$, $P(0, -2)$;
- a pour foyers les points : $F'(0, \sqrt{5})$, $F(0, -\sqrt{5})$;
- pour directrices, les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

H a pour coordonnées : $H(x, -\frac{4}{\sqrt{5}})$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad MF^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 MH^2 &= x^2 + (y+\sqrt{5})^2 - \frac{5}{4}\left(y + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 - \frac{5}{4}\left(y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}y + \frac{16}{5}\right). \\ &= x^2 - \frac{y^2}{4} + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Donc l'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3

1 **a.** f' est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{2x}$.

b. f' est du signe de la fonction : $x \mapsto x - 2$ sur $]0; +\infty[$.

Limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = -\frac{1}{4} - 2 \lim_{x \to 0_+} \ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}\right) = +\infty.$$

D'où le tableau de variation :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4} - 2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f(3) \approx -0,197$ et $f(4) \approx 0,977$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]3; 4[$.

De plus $f(3).f(4) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [3; 4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2 **a.** Remarquons d'abord que si $x \geq 3$, $8\ln x + 1 > 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \frac{x^2-1}{4}=2\ln x \\ &\iff x^2=8\ln x+1 \\ &\iff x=\sqrt{8\ln x+1} \quad \text{(le cas } x=-\sqrt{8\ln x+1} \text{ est impossible car } x\geq 3) \end{aligned}$$

D'où les équations $f(x)=0$ et $g(x)=x$ sont équivalentes sur $[3;+\infty[$.

b. g est continue et dérivable sur $[3;4]$.
De plus, $|g'(x)|\leq \frac{4}{9}$ pour tout $x\in[3;4]$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x\in[3;4],\ \forall\, y\in[3;4],\ |g(x)-g(y)|\leq\frac{4}{9}|x-y|$$

Comme $\alpha\in[3;4]$, on peut appliquer l'inégalité précédente en x quelconque où $x\in[3;4]$ et en $y=\alpha$.
On a alors :

$$\forall\, x\in[3;4],\ |g(x)-g(\alpha)|\leq\frac{4}{9}|x-\alpha|$$

Or d'après 2. a., $g(\alpha)=\alpha$. Il en résulte que : $\forall\, x\in[3;4],\ |g(x)-\alpha|\leq\frac{4}{9}|x-\alpha|$.

3 **a.** Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n\in[3;4]$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
$u_0=3\in[3;4]$.
Comme $u_0\in[3;4]$, alors d'après 2. b., $u_1=g(u_0)\in[3;4]$.
Les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.
Hérédité
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $u_n\in[3;4]$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $u_{n+1}\in[3;4]$.
On a $u_n\in[3;4]$.
On en déduit d'après 2. b., que $g(u_n)\in[3;4]$.
Or $g(u_n)=u_{n+1}$. D'où $u_{n+1}\in[3;4]$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.
On peut appliquer l'inégalité obtenue en 2.b., en $x=u_n$ (car $u_n\in I$).
On a alors :

$$|g(u_n)-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$$

Or $g(u_n)=u_{n+1}$. Il en résulte que $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{4}{9}|u_n-\alpha|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c. Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
Initialisation
Comme $3\leq\alpha\leq 4$, alors $-1\leq u_0-\alpha\leq 0$ donc $|u_0-\alpha|\leq 1=\left(\frac{4}{9}\right)^0$.

La propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

<u>Hérédité</u>

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

D'après 3. b. $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha|$, et par hypothèse de récurrence, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Ainsi, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n-\alpha| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

<u>Conclusion</u>

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2}$.

Par croissance de la fonction logarithme, on a : $n\ln\frac{4}{9} \leq -2\ln 10$.

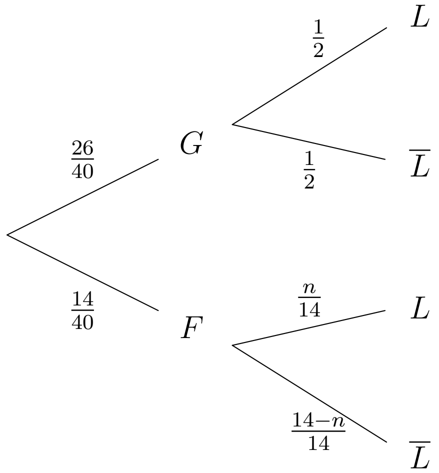
D'où $n \geq \dfrac{2\ln 10}{\ln 9 - \ln 4}$ $(\approx 5,67)$.

Donc $n_0 = 6$.

Exercice 4

1 $P(G) = \dfrac{26}{40}$; $P(F) = \dfrac{14}{40}$.

2



3 <u>Première solution</u>

13 garçons et n filles sur un effectif total de 40 élèves sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues.

Donc la probabilité L qu'une personne choisie soit inscrite dans un centre d'apprentissage de langues est de $\dfrac{13+n}{40}$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR NOVEMBRE 2020

Seconde solution

D'après l'arbre réalisé en 2., on en déduit que :

$P(L) = \dfrac{26}{40} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{14}{40} \times \dfrac{n}{14} = \dfrac{13+n}{40}$.

4

$$\begin{aligned}\text{Les événements } L \text{ et } G \text{ sont indépendants} &\iff P_G(L) = P(L) \\ &\iff \frac{1}{2} = \frac{13+n}{40} \\ &\iff n = 7\end{aligned}$$