Correction bac 2019 - Série C

Exercice 1

1 Déterminons le PGCD de 109 et 226 par l'algorithme d'Euclide donne :

$$\begin{aligned}
226 &= 109 \times 2 + 8\\
109 &= 8 \times 13 + 5\\
8 &= 5 \times 1 + 3\\
5 &= 3 \times 1 + 2\\
3 &= 2 \times 1 + \boxed{1}\\
2 &= 1 \times 2 + 0
\end{aligned}$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, il est donc égal à 1.

2 PGCD(109 ; 226)=1. D'après le théorème de Bézout, l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3 $109 \times 141 = 15369 = 1 + 226 \times 68 \equiv 1\,[226]$.
D'où 141 est l'inverse de 109 modulo 226.

4 **a.**

$$\begin{aligned}
109x - 226y = 1 &\iff 109x - 1 = 226y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z}\\
&\iff 109x - 1 \text{ est un multiple de } 226\\
&\iff 109x - 1 \equiv 0\,[226]\\
&\iff 109x \equiv 1\,[226]
\end{aligned}$$

Les équations (E) et (E') sont équivalentes.

b. 141 est une solution particulière de l'équation $109x \equiv 1\,[226]$.
Soit x une solution de l'équation $109x \equiv 1\,[226]$,

$$\begin{cases} 109x \equiv 1\,[226] \\ 109 \times 141 \equiv 1\,[226] \end{cases} \iff 109x \equiv 109 \times 141\,[226] \iff 109(x - 141) \equiv 0\,[226]$$

$$\iff 226 \text{ divise } 109(x - 141).$$

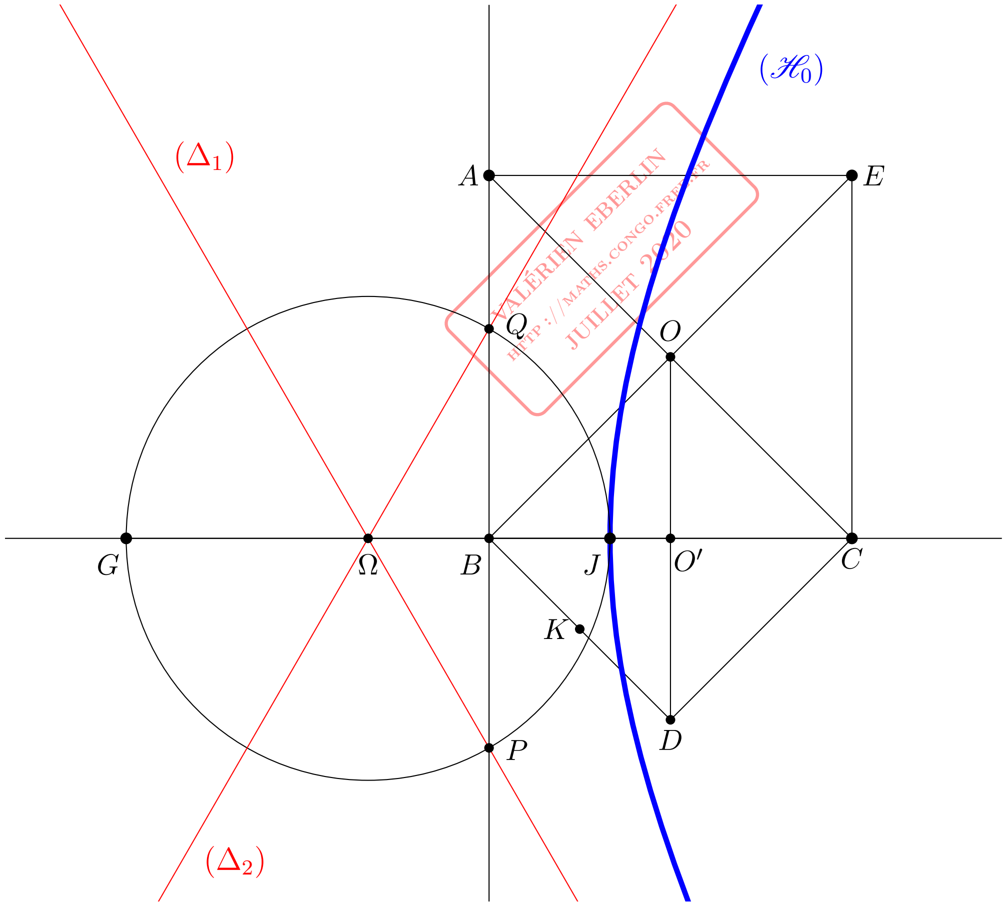
Comme 226 est premier avec 109, alors d'après le théorème de Gauss, 226 divise $x - 141$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 141 = 226k$. D'où $x = 141 + 226k$.
Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{141 + 226k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c. En remplaçant x par $141 + 226k$ dans l'équation (E) : $109x - 226y = 1$, on obtient : $y = 68 + 109k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(141 + 226k\,,\,68 + 109k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020

Exercice 2

1



2 **a.** Le centre de rotation de f est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OD]$ et $[AC]$. C'est le point B.

b. Comme $f(B) = B$ et $f(A) = C$, alors $\theta = \overline{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

c. $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times \overline{((BO),(BA))} \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
D'où $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$ est la réciproque de f.

3 **a.** Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe de la symétrie, alors g est une symétrie glissée.

b. $g(B) = S_{(OD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{2})}(B) = S_{(OD)}(B) = C$.
$g(C) = S_{(OD)} \circ R_{(B,\frac{\pi}{2})}(C) = S_{(OD)}(A) = E$.

c. $g \circ g(B) = g(C) = E$.
g est une symétrie glissée telle que $g \circ g(B) = E$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ de g vérifie $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO}$.

d. Comme $g(B) = C$ alors l'axe de g est la droite dirigée par $\overrightarrow{BO}$ et passant par le milieu O' du segment $[BC]$. C'est par conséquent la droite (KO').

e.

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma) &\iff g(M) = f^{-1}(M)\\
&\iff S_{(OD)}\left(R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M)\right) = R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M) \text{ car } f^{-1} \text{ est la rotation de centre } B \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}\\
&\iff R_{(B,\frac{\pi}{2})}(M) \in (OD)\\
&\iff M \in R^{-1}_{(B,\frac{\pi}{2})}((OD)) = R_{(B,-\frac{\pi}{2})}((OD))
\end{aligned}$$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

(Γ) est alors la droite $R_{(B,-\frac{\pi}{2})}((OD))$. C'est par conséquent une droite perpendiculaire à (OD).
Comme $R_{(B,-\frac{\pi}{2})}(O) = D$, on en déduit que (Γ) est la droite perpendiculaire à (OD) passant par le point D.

4 **a.** Soit S un sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$, d'excentricité 2.
$\dfrac{SC}{SB} = 2 \iff SC^2 - 4SB^2 = 0 \iff (\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB}).(\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB}) = 0$.
Comme les points B, C et S sont alignés, alors $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.

Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}$. D'où $S = G$.
Donc G est le premier sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

Déterminons S tel que $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{SB} \iff \overrightarrow{BS} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où $S = J$ par définition du point J.
Donc J est le second sommet de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

b. Le centre Ω est le milieu du segment $[GJ]$.

c. Les asymptotes sont données par les droites (ΩP) et (ΩQ) où P et Q sont les points d'intersection du cercle principal et de la directrice (BA) (voir figure).

d. Voir figure ci-dessus.

e. Soit (x, y) les coordonnées d'un point M de $(\mathscr{H})$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $H(0, y)$ le projeté orthogonal de M sur la directrice (BA).
Le foyer C a pour coordonnée $C(1, 0)$.
$M \in (\mathscr{H}) \iff \dfrac{MC}{MH} = 2$
$MC^2 = 4MH^2 \iff (1-x)^2 + y^2 = 4x^2$.
D'où l'équation cartésienne de $(\mathscr{H})$: $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$.

Exercice 3

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ est $r^2 + 3r + 2 = 0$.
Elle admet deux racines distinctes : $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$.
Donc la solution générale est : $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 h est de la forme $h(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x}$ avec $h'(0) = 1$.

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

3 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-2x}(1 - 2\mathrm{e}^{x}) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}) = 0$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}(1 - \mathrm{e}^{x})$.

c. $f'(x)$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{x}$ et s'annule pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty[$.

d. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

e. $f(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{-2x}(-1 + 2\,\mathrm{e}^{x}) = 0 \iff -1 + 2\,\mathrm{e}^{x} = 0 \iff x = -\ln 2$.
Le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-\ln 2, 0)$.

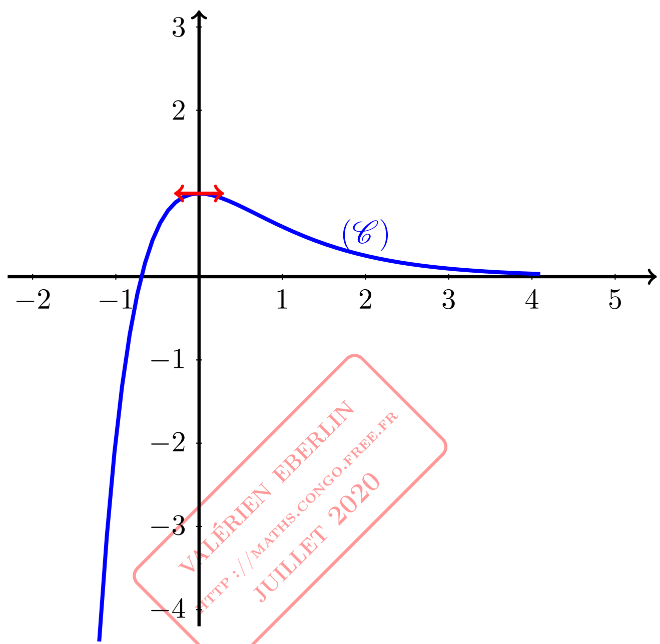
f.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-2x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{x}(1 - 2\,\mathrm{e}^{x}) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2u}}{u}(1 - 2\,\mathrm{e}^{-u}) = +\infty$$

où l'on a posé $u = -x$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

g.



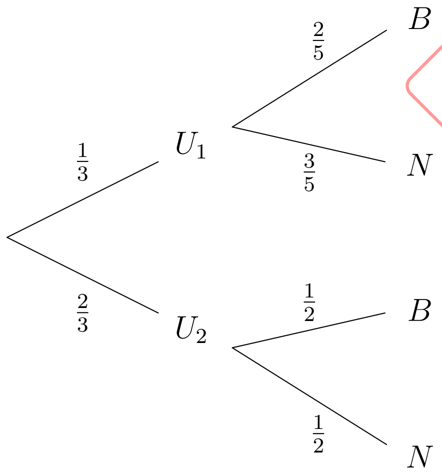
VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020

Exercice 4

1 **a.** $p(\mathscr{U}_1) = p($ « *obtenir 1 ou 2 sur la face supérieure du dé* » $) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

b. $p(\mathscr{U}_2) = 1 - p(\mathscr{U}_1) = \dfrac{2}{3}$.

2



3 $p(\mathscr{N}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{15}$.

4 $p(\mathscr{U}_1/\mathscr{N}) = \dfrac{p(\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{N})}{p(\mathscr{N})} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \dfrac{3}{8}$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020