Sujet bac 2017 - Série C

Exercice 1 — 4 points

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $48x + 35y = 1$.

a Justifier à l'aide du théorème de Bézout que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b Justifier que les entiers 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c En remarquant que (E) peut s'écrire $48x \equiv 1[35]$, déterminer une solution particulière (x_0, y_0).

d Achever la résolution de l'équation (E).

Exercice 2 — 8 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de centre de gravité E.

1 Faire une figure. On prendra $AB = 4$ cm.

2 Construire le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A passant par B.

3 Construire le point F symétrique de A par rapport à E.

4 Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal $(\mathscr{C})$ et dont une directrice est la droite (BC).

5 Montrer que F est un foyer de (Γ). Préciser son axe focal.

6 On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC), et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{AG}$.

a. Construire H.

b. On pose $AF = c$ et $AB = a$. Que représente le rapport $\dfrac{AF}{AB}$ pour (Γ) ?

Montrer que ce rapport est égal à $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

7 Construire le point I du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \dfrac{c}{a}\,\overrightarrow{GH}$.

8 Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H. Construire le point J de (Γ) situé sur (d) et situé dans le demi plan délimité par la droite (AH) contenant le point C.

9 On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F.
Construire l'arc $(\mathscr{H})$ de (Γ) d'extrémités J et S.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

10 On désigne par s la similitude plane indirecte définie par : $s = h \circ S_{(BC)}$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe (Δ) et le centre (Ω) de s.

b. Construire l'arc $(\mathscr{H}')$, image de $(\mathscr{H})$ par s.

c. Déterminer l'excentricité de (Γ') image de (Γ) par s.

Exercice 3 — 5 points

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
On pose pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1 **a.** Prouver que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F sur I.

2 On admet que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

a. Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Erreur dans l'énoncé : L'inégalité $F(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$ pour tout $x \geq 2$ est fausse.

Substituer cette question par :

Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variation de F.

d. Donner l'allure de la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction F dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On donne $F(0) = 0,13$; $F(2) = 0,5$.

3 Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

a. Vérifier que $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.
Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 — 3 points

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de 0,7 ;
- s'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de 0,8 ;
- s'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de 0,4.

On note R_1 l'événement « premier tir au but est réussi »et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».

1 Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.

2 Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.

3 Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.

4 On note A, l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer $P(A)$.