Correction bac 2015 - Série C

Exercice 1

1 **a.** Les nombres 21 et 17 étant premiers entre eux, PGCD $(21; 17) = 1$.

D'après le théorème de Bezout, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $21x_0 + 17y_0 = 1$.

En multipliant membre à membre l'égalité précédente par 4, on a : $21.(4x_0) - 17.(-4y_0) = 4$

On en déduit que $(4x_0, -4y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est alors solution de l'équation (E).

Donc l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. On a :

$$\begin{aligned} 21x - 17y = 4 &\iff 21x - 4 = 17y \quad \text{avec } y \text{ entier} \\ &\iff 21x - 4 \quad \text{est un multiple de } 17 \\ &\iff 21x - 4 \equiv 0\,[17] \\ &\iff 21x \equiv 4\,[17] \end{aligned}$$

Les équation (E) et (E') sont équivalentes.

2 **a.** L'algorithme d'Euclide appliqué à 21 et 17 donne :

$21 = 17 \times 1 + 4$

$17 = 4 \times 4 + 1$

En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

$1 = 17 - 4 \times 4$

$1 = 17 - (21 - 17 \times 1) \times 4$

$1 = 17 - 21 \times 4 + 17 \times 4$

$1 = 17 \times 5 - 21 \times 4$

On en déduit que $21 \times (-4) = 1 + 17 \times (-5)$ et par conséquent : $21 \times (-4) \equiv 1\,[17]$.

Donc l'inverse de 21 modulo 17 est -4.

b. Comme $21 \times (-4) \equiv\ 1\,[17]$, on en déduit que $21 \times (-16) \equiv\ 4\,[17]$. Donc -16 est une solution particulière de l'équation (E').

Soit x une solution de l'équation (E'),

$$\begin{aligned} \begin{cases} 21x \equiv\ 4\,[17] \\ 21 \times (-16) \equiv 4\,[17] \end{cases} &\iff 21x \equiv 21 \times (-16)\,[17] \iff 21(x + 16) \equiv 0\,[17] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \iff 17 \text{ divise } 21(x + 16) \end{aligned}.$$

Comme 17 est premier avec 21, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $x + 16$. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 16 = 17k$.

D'où $x = -16 + 17k = 1 + 17(k - 1) = 1 + 17k'$.

Les solutions de l'équation (E') sont l'ensemble $\{1 + 17k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

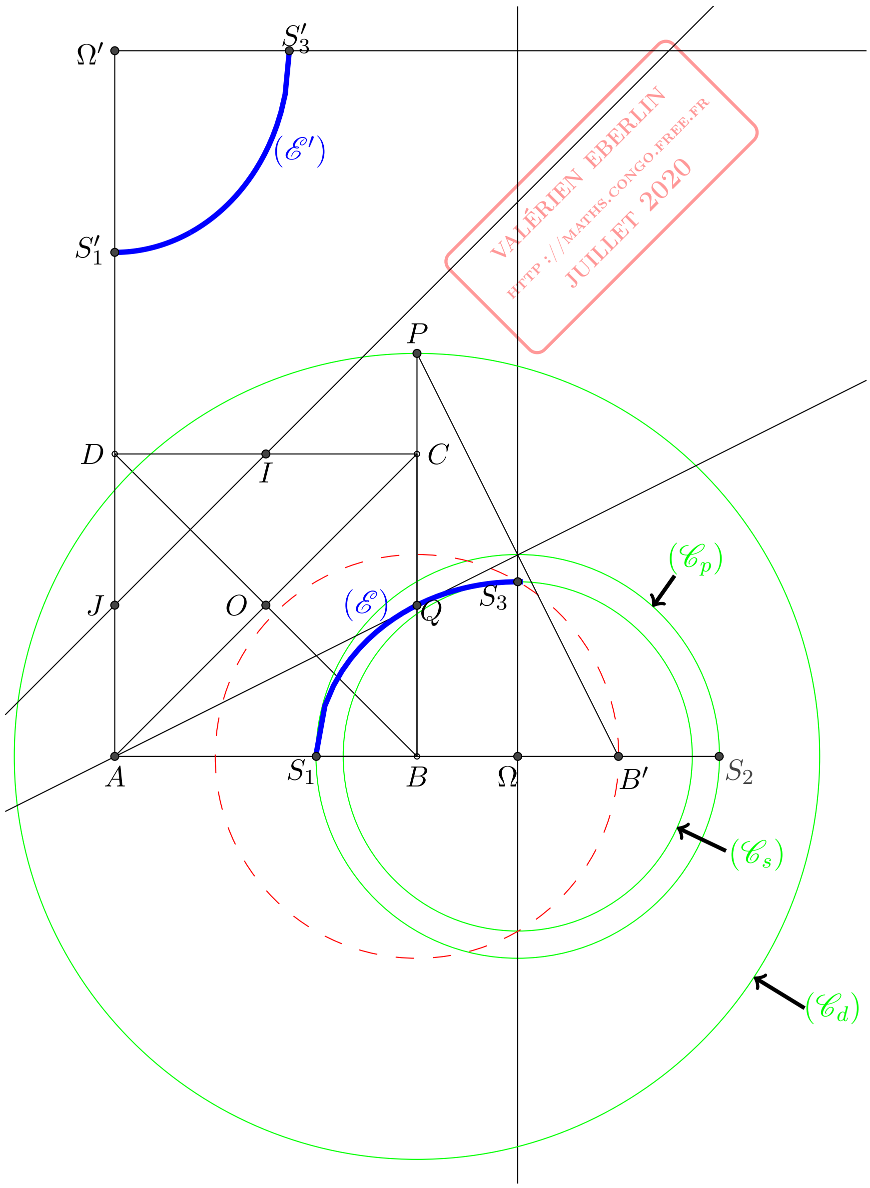
VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

3 En remplaçant x par $1 + 17k$ dans l'équation (E) : $21x - 17y = 4$, on obtient : $y = 1 + 21k$.

Les solutions de l'équation (E) sont l'ensemble : $\{(1 + 17k\,;\, 1 + 21k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1



2 L'axe focal est la droite perpendiculaire à la directrice (AD) passant par le foyer B. C'est par conséquent la droite (AB).

3 **a.** Les points S_1 et S_2 à déterminer sont les sommets de l'ellipse.

Soit S un sommet de l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'excentricité $\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{SB}{SA} = \dfrac{1}{2} \iff 4SB^2 - SA^2 = 0 \iff (2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}).(2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}) = 0.$

Comme les points A, B et S sont alignés, alors $2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$ ou $2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$.

<u>Déterminons S tel que $2\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$</u>

$2\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SA} \iff 2\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{BS} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}.$

Le premier sommet S_1 de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie $\overrightarrow{BS_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

<u>Déterminons S tel que $2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$</u>

$2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \iff 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{BA}$.
Le second sommet S_2 de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$.

b. Voir figure.
À partir des sommets S_1 et S_2, on construit le centre Ω de l'ellipse, milieu de $[S_1S_2]$ et on construit le second foyer B', symétrique de B par rapport à Ω.

4 Le cercle principal $(\mathscr{C}_p)$ de $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre Ω et de rayon, le demi-grand axe ΩS_1.

5 Soit S_3 le point d'intersection de l'axe non focal et du cercle de centre B et de rayon, le demi-grand axe ΩS_1.
S_3 vérifie : $\Omega S_1^2 = BS_3^2 = B\Omega^2 + \Omega S_3^2$. C'est donc un sommet de l'ellipse et ΩS_3 est le demi-petit axe.
Le cercle secondaire $(\mathscr{C}_s)$ est le cercle de centre Ω et de rayon, le demi-petit axe ΩS_3.

6 Le cercle directeur relatif au foyer B est le cercle de centre B et de rayon, le grand axe S_1S_2.

7 Soit P, le point d'intersection de la demi droite $[BC)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$.
Le point de $(\mathscr{E})$ situé sur la demi-droite $[BC)$ est le point d'intersection de la demi-droite $[BC)$ et de la médiatrice de $[B'P]$ où B' est le second foyer de $(\mathscr{E})$.
En effet, notons Q ce point. Comme Q est sur la médiatrice de $[PB']$, alors $QB' = QP$.
D'où $QB' + QB = QP + QB = PB = 2\,\Omega B$. Ce qui prouve que le point Q appartient à l'ellipse $(\mathscr{E})$.

8 Voir figure ci-dessus.

9 **a.** On appelle symétrie glissée, toute transformation qui peut s'écrire comme la composée commutative d'une translation et d'une réflexion d'axe dirigée par le vecteur de la translation.

b. Comme f est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de la symétrie, alors f une symétrie glissée.

Vecteur de la symétrie glissée f

$f(A) = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(A) = S_{(AC)}(B) = D$.
$f(D) = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(D) = S_{(AC)}(C) = C$.
f est une symétrie glissée telle que $f \circ f(A) = C$. On en déduit que le vecteur de la symétrie glissée f est $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

Axe de la symétrie glissée f

Comme $f(A) = D$, alors l'axe de la symétrie glissée f est la droite dirigée par $\overrightarrow{OC}$ et passant le milieu de $[AD]$. C'est par conséquent la droite (JI).

c. Voir figure.

Exercice 3

1 Comme $f(\alpha) = 0$, alors $1 - \alpha \ln \alpha = 0$.
On en déduit que $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$. D'où $\alpha = g(\alpha)$.
α est donc solution de l'équation $g(x) = x$.

2 Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n \in I$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
<u>Initialisation</u>
$u_0 = 2 \in I$.
$u_1 = e^{\frac{1}{2}} \in I$.
Donc les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.
<u>Hérédité</u>
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \in I$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \in I$.
On a : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que : $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3}$.
Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que : $e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{u_n}} \leq e^{\frac{2}{3}}$.
Or $e^{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$ et $e^{\frac{2}{3}} < 2$. D'où $u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}} \in I$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
<u>Conclusion</u>
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 g est continue et dérivable sur I.
De plus, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Comme $\alpha \in I$, on peut appliquer l'inégalité précédente en x quelconque où $x \in I$ et en $y = \alpha$.
On a alors :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Or $g(\alpha) = \alpha$. Il en résulte que : $\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
On peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ (car $u_n \in I$).
On a alors :

$$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$. Il en résulte que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
<u>Initialisation</u>
Comme $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$, alors $0 \leq 2 - \alpha \leq \frac{1}{2}$ donc $|u_0 - \alpha| = 2 - \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
<u>Hérédité</u>
Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
D'après 4. a. $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$, et par hypothèse de récurrence, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
Ainsi, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
<u>Conclusion</u>
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

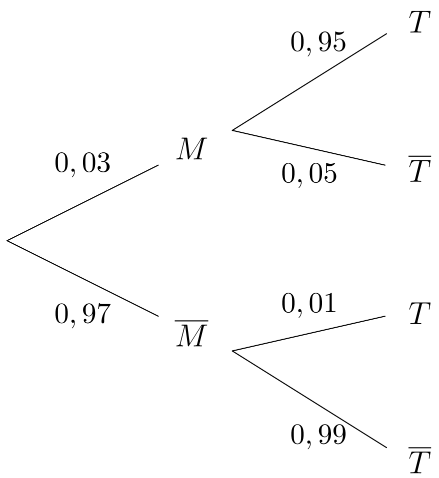
c. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

5 **a.** On cherche un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_0} \leq 10^{-1}$.
Par croissance de la fonction logarithme, on a : $n_0 \ln\frac{1}{2} \leq -\ln 10$.
D'où $n_0 \geq \dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ $(\approx 3,32)$.
On peut prendre $n_0 = 4$.

b. $u_1 = g(u_0) \approx 1,6487$; $u_2 = g(u_1) \approx 1,834$; $u_3 = g(u_2) \approx 1,725$; $u_4 = g(u_3) \approx 1,7855$.
$u_4 \approx 1,786$ est une valeur approchée de α.

Exercice 4

1



2 $p(M \cap T) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285$.
$p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,97 \times 0,99 = 0,9603$.

3 $p(T) = 0,03 \times 0,95 + 0,97 \times 0,01 = 0,0382$.
$p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 0,9618$.

4 **a.** $p(\overline{M}/T) = \dfrac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,97 \times 0,01}{0,0382} \approx 0,2539$.

b. $p(M/\overline{T}) = \dfrac{p(M \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,03 \times 0,05}{0,9618} \approx 0,0015$.