Sujet bac 2014 - Série C

Exercice 1 4 points

1 Soit (E) l'équation d'inconnue Z :

$$Z^2 - (2i\, e^{i\theta} \cos\theta)Z - e^{i\,2\,\theta} = 0 \quad \text{où} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\,\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i\,(\frac{\pi}{2}+2\,\theta)}$.

On note Z_0 l'affixe de O.

a. Exprimer $arg(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0})$ en fonction de θ.

b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

c. On suppose que $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 2 8 points

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 6\,\text{cm}$. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[BD]$.

1 Faire la figure.

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC).

2 **a.** Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?

b. Déterminer le pas α de $(\mathscr{P})$.

Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

3 **a.** Démontrer que la droite (AG) est une tangente à $(\mathscr{P})$ en un point à déterminer.

b. Construire le point H de $(\mathscr{P})$ situé sur la médiatrice du segment $[EB]$.

c. Construire l'arc $(\mathscr{P}_0)$ de $(\mathscr{P})$ de corde focale le segment $[GI]$ où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB).

Soit $(\mathscr{P}')$ la parabole de foyer B et de directrice (AG).

4 Déterminer le centre Ω, le rapport K et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S qui transforme $(\mathscr{P}')$ en $(\mathscr{P})$.

5 Construire l'antécédent J de G par S.

6 Construire l'arc $(\mathscr{P}'_0)$ qui a pour image $(\mathscr{P}_0)$ par S.

On désigne par A'_0 l'aire de la portion $(\mathscr{E}'_0)$ du plan limitée par les droites (JB), (EF) et $(\mathscr{P}'_0)$, et par A_0 celle de la portion du plan $(\mathscr{E}_0)$ image de $(\mathscr{E}'_0)$ par S.

7 Démontrer que $A_0 = 2A'_0$.

8 Déterminer l'aire A de $S \circ S \circ S \circ S(\mathscr{E}'_0)$ en fonction de A_0

Exercice 3 4 points

Soit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

1 Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n.

2 On suppose que n est impair.

- **a.** Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
- **b.** Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n}.
- **c.** Dresser le tableau de variation de f_n.

3 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^p f_n(x)dx$ et $J_n = \lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$.

- **a.** En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+2)J_n$.
- **b.** En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0.

Exercice 4 4 points

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.
La variable aléatoire X est celle qui détermine «la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis»

1 Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Calculer l'expérance mathématiques, la variance et l'écart-type de X.