Correction bac 2009 - Série C

Exercice 1

1 **a.** L'équation caractéristique de la suite récurrente $(S) : V_{n+2}+V_{n+1}-V_n$ est : $r^2+r-6=0$.
Elle admet deux solutions distinctes : $r=2$ et $r=-3$.
On en déduit que la suite (a_n) de terme générale $a_n=\alpha 2^n$ et (b_n) de terme général $b_n=\beta(-3)^n$ sont les suites géométriques de (S).

Le premier terme de (a_n) et celui de (b_n) étant égal à 1, on a $a_0=\alpha=1$ et $b_0=\beta=1$.
D'où : $a_n=2^n$ et $b_n=(-3)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}U_{n+2}+U_{n+1}-6U_n &= \alpha 2^{n+2}+\beta(-3)^{n+2}+\alpha 2^{n+1}+\beta(-3)^{n+1}-6(\alpha 2^n+\beta(-3)^n)\\ &= \alpha\underbrace{\left(2^{n+2}+2^{n+1}-6.2^n\right)}_{=0}+\beta\underbrace{\left((-3)^{n+2}+(-3)^{n+1}-6(-3)^n\right)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $(U_n)\in S$.

2 **a.** <u>Déterminons d'abord une solution particulière de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$</u>

L'algorithme d'Euclide appliqué à 27 et 8 donne :

$27=8\times 3+3$

$8=3\times 2+2$

$3=2\times 1+1$

En remontant l'algorithme d'Euclide, l'on obtient :

$1=3-2\times 1$

$1=3-(8-3\times 2)=-8+3\times 3$

$1=-8+(27-8\times 3)\times 3=-8\times 10+27\times 3$

Donc $8\times(-10)-27\times(-3)=1$.

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par -11, on obtient :
$8\times(110)-27\times(33)=-11$.

D'où $(110,33)$ est une solution particulière de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$.

<u>Ensemble des solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$</u>

$$\begin{cases}8\alpha-27\beta=-11\\ 8\times 110-27\times 33=-11\end{cases}\iff 8\alpha-27\beta=8\times 110-27\times 33\iff 8(\alpha-100)=27(\beta-33)$$

On en déduit 8 divise $27(\beta-33)$.
Comme 8 est premier avec 27, alors d'après le théorème de Gauss, 8 divise $\beta-33$.
Il existe donc un entier k tel que $\beta-33=8k$. D'où $\beta=33+8k$.
En remplaçant β par $33+8k$ dans l'équation $8\alpha-27\beta=-11$, on obtient $\alpha=110+27k$.

L'ensemble des solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$ est : $\{(110+27k\,;\,33+8k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020

b. En remplaçant α par $110+27k$ et β par $33+8k$ dans l'équation $4\alpha+9\beta=17$, on trouve $k=-4$.

c. La suite (U_n) est de terme général $U_n=\alpha 2^n+\beta(-3)^n$.

$$\begin{cases} U_2=17 \\ U_3=-11 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha+9\beta=17 \\ 8\alpha-27\beta=-11 \end{cases}$$

Or d'après 2.a., α et β sont solutions de l'équation $8\alpha-27\beta=-11$ s'ils sont de la forme : $\alpha=110+27k$ et $\beta=33+8k$.

Mais d'après 2. b., $\alpha=110+27k$ et $\beta=33+8k$ sont solutions de l'équation $4\alpha+9\beta=17$ si $k=-4$.

D'où $\alpha=110+27\times(-4)=2$ et $\beta=33+8\times(-4)=1$.

On en déduit aussi que pour $U_2=17$ et $U_3=-11$, la forme générale de la suite (U_n) est $U_n=2.2^n+(-3)^n$.

d.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On sait que $-3\equiv 2\,[5]$. On en déduit que $(-3)^n\equiv 2^n\,[5]$.

En ajoutant membre à membre 2.2^n à l'égalité précédente, on a : $2.2^n+(-3)^n\equiv 2.2^n+2^n\,[5]$.

C'est à dire $2.2^n+(-3)^n\equiv 2^n(1+2)\,[5]$.

D'où $U_n\equiv 3.2^n\,[5]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

e.
- si $n=0$, $U_0\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_0 par 5 est 3.
- si $n=1$, $U_1\equiv 6\,[5]\equiv 1\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_1 par 5 est 1.
- si $n=2$, $U_2\equiv 12\,[5]\equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_2 par 5 est 2.
- si $n=3$, $U_3\equiv 24\,[5]\equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_3 par 5 est 4.
- si $n=4$, $U_4\equiv 48\,[5]\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_4 par 5 est 3.

<u>Déduisons les restes suivant les valeurs de n</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Alors n peut s'écrire $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$ ou $n=4k+3$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Comme $2^4\equiv 1\,[5]$, alors $(2^4)^k\equiv 1\,[5]$. On en déduit que :

- si $n=4k$, $U_{4k}\equiv 3.2^{4k}\,[5]\equiv 3\,(2^4)^k\,[5]\equiv 3\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k} par 5 est 3.
- si $n=4k+1$, $U_{4k+1}\equiv 3.2^{4k+1}\,[5]\equiv 3\times 2.2^{4k}\,[5]\equiv 6\,(2^4)^k\,[5]\equiv 6\,[5]\equiv 1\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+1} par 5 est 1.
- si $n=4k+2$, $U_{4k+2}\equiv 3.2^{4k+2}\,[5]\equiv 3\times 4.2^{4k}\,[5]\equiv 12\,(2^4)^k\,[5]\equiv 12\,[5]\equiv 2\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+2} par 5 est 2.
- si $n=4k+3$, $U_{4k+3}\equiv 3.2^{4k+3}\,[5]\equiv 3\times 8.2^{4k}\,[5]\equiv 24\,(2^4)^k\,[5]\equiv 24\,[5]\equiv 4\,[5]$. Le reste de la division euclidienne de U_{4k+3} par 5 est 4.

3 **a.** En remarquant que $W_n=2^{n+1}+(-3)^n=2.2^n+(-3)^n$, on en déduit que la suite (W_n) n'est autre que la suite (U_n). D'après 2.d., $W_n\equiv 3.2^n\,[5]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= W_0 + W_1 + \cdots + W_n \\ &\equiv 3.2^0 + 3.2^1 + \cdots + 3.2^n \,[5] \\ &\equiv 3(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n)\,[5] \\ &\equiv 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \equiv -3(1-2^{n+1})\,[5] \\ &\equiv 2(1-2^{n+1})\,[5] \quad \text{car} \;\; -3 \equiv 2\,[5] \\ &\equiv 2 - 4.2^n \,[5] \end{aligned}$$

b. $1956 = 4 \times 489$.
$S_{1956}` \equiv 2 - 4.2^{1956}\,[5] \equiv 2 - 4.\,(2^4)^{489} \equiv 2 - 4 \times 1\,[5] \equiv -2\,[5] \equiv 3\,[5]$.
Le reste de la division euclidienne de S_{1956} par 5 est 3.

Exercice 2

1 L'équation $z^2 + (\sqrt{3}+i)z + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.
Cherchons un nombre complexe $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.
$x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + 2\sqrt{3}i$.
Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on a : $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \sqrt{3}$.
D'autre part, comme $|u|^2 = |-2 + 2\sqrt{3}i|$ alors $x^2 + y^2 = 4$.

On obtient le système d'équations suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \\ xy = \sqrt{3} & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient $x = -1$ ou $x = 1$;
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on en déduit que $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \sqrt{3}$.
L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.
D'où $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2$.
On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z' = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(-1+i) \text{ et } z'' = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(-1-i)$$

2 $z' = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(-1+i) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$.

$z'' = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}(-1-i) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)$.

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

Problème
Partie A

I **1**

Construction du point I

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$

$2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

I est le point tel que B soit le milieu du segment $[AI]$.

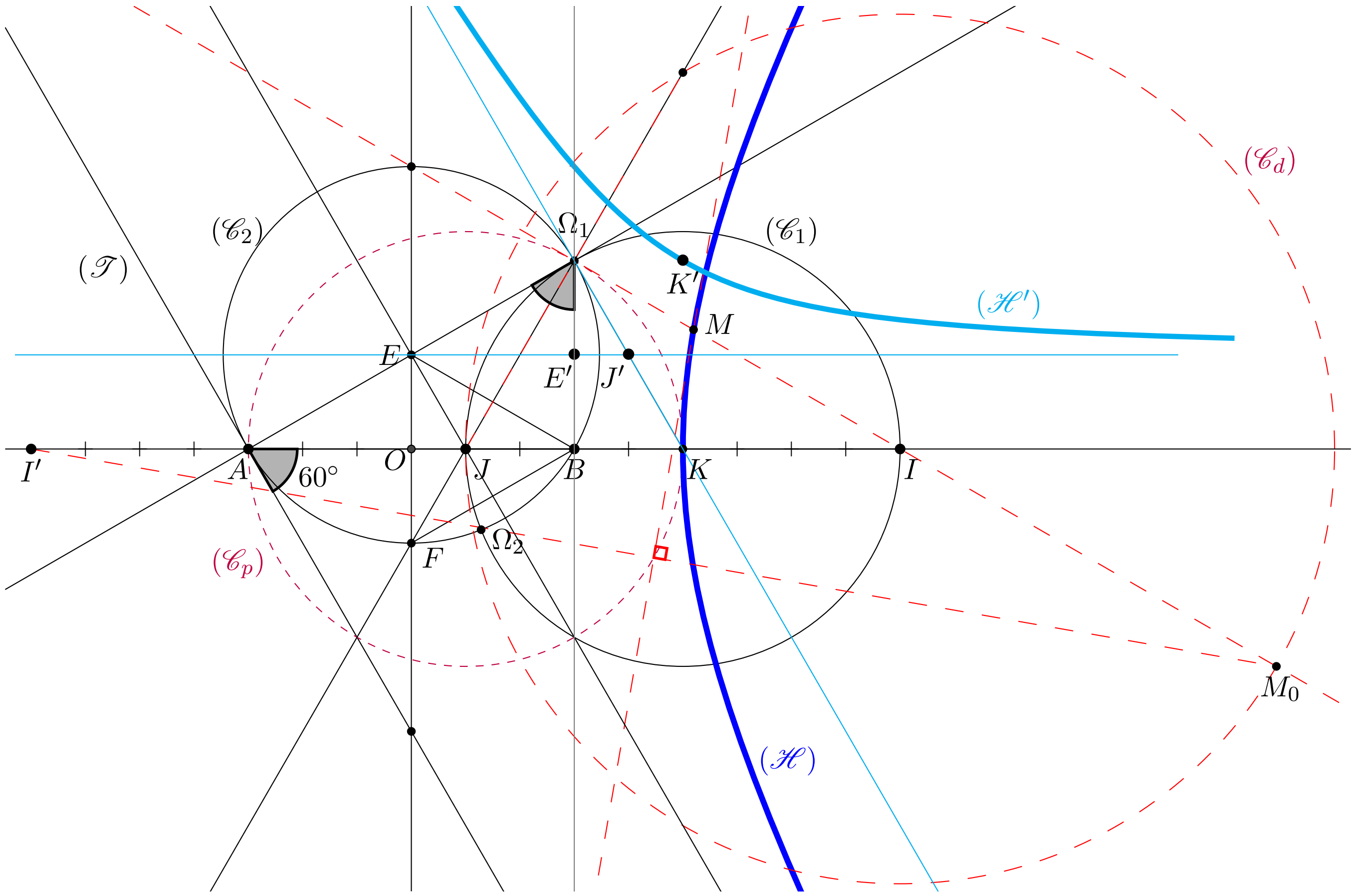
Construction du point J

$2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$

$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$

D'où $\quad \overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

J est le point du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



II

2. Le centre du cercle $(\mathscr{C}_2)$ est le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à $(\mathscr{T})$ passant par A.

3.

Comme $J \in (\mathscr{C}_1)$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ alors J est un point du cercle $(\mathscr{C}_1)$ situé sur la corde $[AB] \setminus \{A, B\}$ de $(\mathscr{C}_2)$. Par conséquent, J est un point de l'arc du cercle $(\mathscr{C}_1)$ qui est situé dans le cercle $(\mathscr{C}_2)$ et J est distinct de Ω_1 et Ω_2.

D'autre part, $B \in (\mathscr{C}_2)$ et $\overrightarrow{IB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ (voir$*$) alors B est un point du cercle $(\mathscr{C}_2)$ situé sur la corde $[IJ] \setminus \{I, J\}$ de $(\mathscr{C}_1)$. Par conséquent, B est un point de l'arc du cercle $(\mathscr{C}_2)$ qui est situé dans le cercle $(\mathscr{C}_1)$ et B est distinct de Ω_1 et Ω_2.

On en déduit que les points d'intersection Ω_1 et Ω_2 des cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont situés de part et d'autre de la droite $(JB) = (AB)$.

$$(*)\quad 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{o} \iff 2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{o}$$
$$\iff 3\overrightarrow{JI} + 4\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{o}$$
$$\iff \overrightarrow{IB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$$

III **1**

Soit Ω, le centre de la similitude S. Alors Ω vérifie $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Or $((\mathscr{T}), (AB)) = \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$. On en déduit que $((\mathscr{T}), (AB)) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})\,[\pi]$.

L'angle formé par la tangente $(\mathscr{T})$ et la corde $[AB]$ a même mesure que l'angle inscrit $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ interceptant cette corde. Donc $\Omega \in (\mathscr{C}_2)$.

De plus, comme $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ est orienté positivement, alors $\Omega = \Omega_1$.

2 Comme $S(A) = B$, alors $A\Omega_1 = 2B\Omega_1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} AB^2 &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2A\Omega_1.B\Omega_1 \cos(\frac{\pi}{3}) \\ &= A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2(2\,B\Omega_1).B\Omega_1 \times \frac{1}{2}. \\ &= A\Omega_1^2 - B\Omega_1^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $AB^2 + B\Omega_1^2 = A\Omega_1^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $AB\Omega_1$ est rectangle en B. Par conséquent, le centre E du cercle circonscrit au triangle $AB\Omega_1$ est également le milieu de l'hypoténuse $[A\Omega_1]$. Donc les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

I

1 **a.**

- $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BO}$.

  En effet, Comme $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$, alors $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$. Il en résulte que $3\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$. D'où $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BO}$

- (BO) où $O \in [EF]$, est la médiane du triangle EFB issue de B.

Donc J est le centre de gravité du triangle EFB.

b. Montrons que $EJ = BK$

J étant le centre de gravité du triangle équilatéral EFB, alors $EJ = JB$. Or $JB = BK$. Donc $EJ = BK$.

Montrons que $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60°$.

$(EJ) \perp (\Omega_1 A)$ et $(BK) \perp (\Omega_1 B)$.

De plus, les angles $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})$ et $(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B})$ étant aigus, on en déduit que $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B}) = 60°$

c. Comme $EJ = BK$ et $\overrightarrow{EJ} \neq \overrightarrow{BK}$, il existe un rotation R d'angle $\overline{(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK})} = 60°$ qui transforme E en B et J en K.

2 Comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par le point Ω_1.
D'autre part, on a $BJ = BK$ et $(JK) \perp (B\Omega_1)$. On en déduit que $(B\Omega_1)$ est la médiatrice de $[JK]$.
Donc les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se coupent en Ω_1, centre de la rotation R.

II **1** Le triangle EFB étant équilatéral de centre de gravité J, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par les points J et F.
De plus, comme le triangle $\Omega_1 EB$ est équilatéral, alors la médiatrice de $[EB]$ passe par Ω_1.
Donc les points Ω_1, J et F sont alignés.

2 $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 B)} \circ S_{(\Omega_1 F)} = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 F)}$.
g est la composée de deux symétries axiales $S_{(EF)}$ et $S_{(\Omega_1 F)}$ d'axes sécants en F. C'est donc une rotation de centre F.

Partie C

1 (IJ) est l'axe focal de $(\mathscr{H})$.
Le second foyer de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ est le point I', symétrique de I par rapport à J.
A et K sont les sommets de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.
<u>Construction de M</u>
Soit M_0, le point d'intersection de $[\Omega_1 I)$ et du cercle directeur $(\mathscr{C}_d)$ associé au foyer I.
M est le point d'intersection de $[I\Omega_1]$ et de la médiatrice de $[I'M_0]$.

En effet,
$$\begin{aligned} MI' - MI &= MM_0 - MI \quad (\text{car } M \text{ est sur la médiatrice de } [I'M_0]) \\ &= IM_0 \\ &= AK \end{aligned}.$$
Ce qui prouve que M est un point de l'hyperbole.

2 <u>$(F\Omega_1)$ asymptote de $(\mathscr{H})$</u>
$(J\Omega_1) \perp (I\Omega_1)$ car le triangle $IJ\Omega_1$ est inscrit dans le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de diamètre $[IJ]$.
Or $[J\Omega_1]$ est un rayon du cercle principal $(\mathscr{C}_p)$. On en déduit que $(I\Omega_1)$ où I est un foyer de $(\mathscr{H})$ est la tangente à $(\mathscr{C}_p)$ en Ω_1.
Donc $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H})$ et d'après II. 1., $(F\Omega_1)$ est asymptote à $(\mathscr{H})$.

<u>(JE) asymptote de $(\mathscr{H})$</u>
(JE) étant le symétrique de $(F\Omega_1)$ par rapport à l'axe focal (JA) est par conséquent la seconde asymptote de $(\mathscr{H})$.

3 **a.** Comme toute similitude conserve le rapport des distances, alors $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{H}')$ ont même excentricité.
D'où $e = \dfrac{JI}{JK} = 2$.

b. <u>Asymptotes de $(\mathscr{H}')$</u>

- $S(\Omega_1) = \Omega_1$.
  $S(J) = J'$ où J' est le milieu de $[\Omega_1 K]$.
  Comme $(J\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H})$ alors $(J'\Omega_1)$ est une asymptote de $(\mathscr{H}')$.
- $S(J) = J'$.
  $S(E) = E'$ où E' est le milieu du segment $[\Omega_1 B]$.
  Comme (EJ) est la seconde asymptote de $(\mathscr{H})$ alors $(E'J')$ est la seconde asymptote de $(\mathscr{H}')$.

Sommets de $(\mathscr{H}')$

- $S(A) = B$.
  Comme A est un sommet de $(\mathscr{H})$, alors B est un sommet de $(\mathscr{H}')$.
- Déterminons le second sommet de $(\mathscr{H}')$.
  $S(J) = J'$.
  Comme J est le centre de $(\mathscr{H})$, alors J' est le centre de $(\mathscr{H}')$.
  On en déduit que le second sommet de $(\mathscr{H}')$ est le point K', symétrique de B par rapport à J'.